日食の計算

藤沢健太

2009 年 1 月 1 日版
2011 年 11 月 11 日追記（参考文献）

はしがき

日食とは、太陽と地球の間を月が通過するときに、地上の観測者から見た太陽の一部または全部を月が覆い隠す現象である。太陽、地球、月の運行は天体力学にもとづいて精密に計算できるので、未来のいつ、どこでどのように日食が見られるか予測できる。

未来のこと、例えば１年先のことを具体的に、しかも精密に予測できるのは天文学だけである。そのことを最もよく表しているのが日食であるといえる。例えば 2009 年 7 月 22 日に日本近辺で皆既日食が観測されることは何十年も前から予測されている。日食の予報は、昔は為政者の予言という形で権威を高めるために利用された。現代では自然現象の観察と理解という教育的な側面に最も役に立つ。日食の観察によって、月、太陽、そして地球という天体が確かに動いていることが実感できる。そのことをより良く体感するために、日食がどのように観測されるか自分で計算し、それを実際の観測で確かめてみるのがよい。

この冊子は、ベッセルの日食要素を用いた日食の計算方法について説明したものである。この計算によって、ある観測地点での日食経過の基本的情報を得ることができる。計算は細かくて面倒だが、使うのは sin, cos, tan と四則演算だけであり、高校生でも十分理解し計算できるだろう。計算の精度は１秒程度である。具体的な計算のために、2009 年 7 月 22 日の日食を題材とした。

読者として日食に興味を持ち自分で予報の計算をやってみたいと考える人、また日食という自然現象を教育に役立てたいと考えている教師などを想定している。数ヶ月先のことをわずか１秒の誤差で計算できるのは興味深いことであり、うまく利用すればよい教育材料になるだろう。

本文では、最初に計算以前のごく基礎的な事柄、および計算の元となるベッセル日食要素に関する説明をする。次に観測地点の経度・緯度・標高などに関する準備計算を行い、日食計算の主要部である観測地点と月の影の位置関係を計算する。この計算結果を元にして、日食の始まりと終りの時刻、欠ける方向、食分などを計算する。練習問題もいくつか示したので参考にされたい。

これらの計算はパソコンを使えば容易に行えるし、今ではエクセルなど便利な表計算ソフトも利用できる。本文の説明を理解しなくても、観測地点の経度と緯度を入力すれば日食の開始や終了の時刻を自動で計算するワークシートを作ることも可能である。

しかし、ノートと鉛筆と電卓を用意して一つずつ計算結果を記録しながら計算を進めるという昔ながらのやり方を、少なくとも一度は試してほしい。実際に手計算を行ってみれば計算の意味を理解できるし、表に書かれている数値がどのような性質を持っているかを感覚としてつかむこともできる。この感覚は天体の運行を数値として表しているのだという理解にもつながる。意味のある数値の判断や計算上の工夫など、数字を通じて理解できることもたくさんあるだろう。

目次

（０） 計算を始める前に

０－１．日食の概要

日食は月が太陽を覆い隠す現象（図１）、月食は月が地球の影に入る現象である。これらをまとめて食という。以下では日食のことをしばしば簡単に食と呼ぶ。

日食には部分日食、皆既日食、金環日食の３つがある。月が太陽を全部覆い隠した状態が皆既日食である。図１の本影の中にいる観測者が皆既日食を観察できる。このとき、太陽の明るい面（光球）が見えなくなるので、太陽の大気であるコロナやコロナ中の水素ガスの発光現象であるプロミネンスなどが観察される。金環日食は、太陽より月が小さく見える状態でおきる[1]。月が太陽を覆いきれず、月の回りに太陽のふちが取り巻いて見える状態、即ち金色の環となる。部分日食は、月が太陽の一部分を覆い隠した状態である。図１の半影の中にいる観測者が部分日食を観察できる。皆既日食や金環日食の前後も部分日食の状態である。

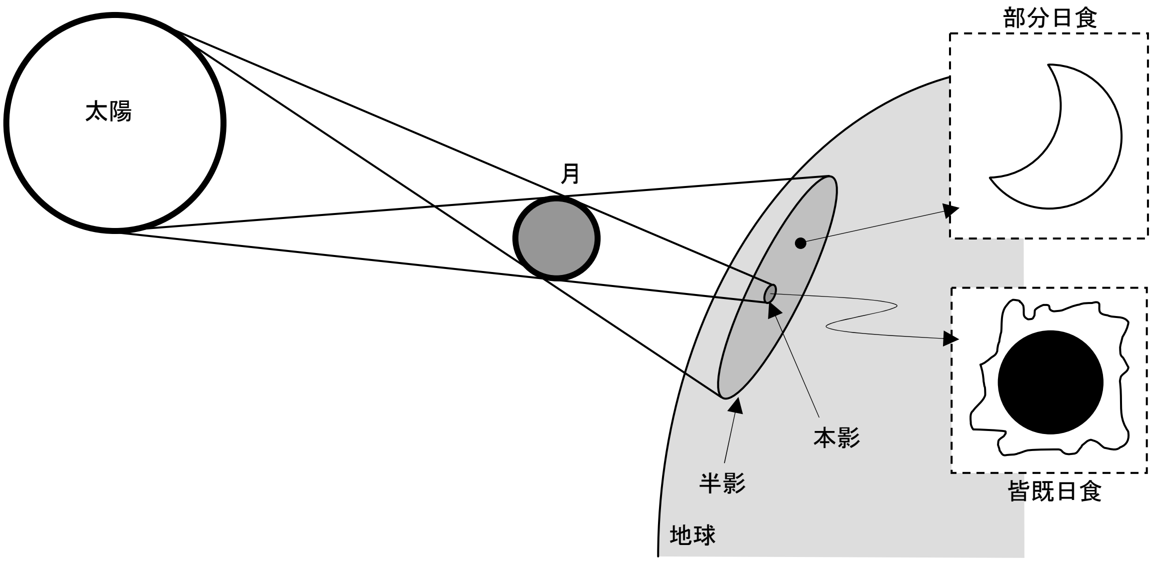


図１．日食の模式図（これは模式図であり、実際の月の影ははるかに細長いことに注意）

図１に示したように日食とは月の影が地球に映る現象である。月の影の位置は時間と共に動いてゆくので、地球上の日食が見られる範囲は帯状になる。特に本影は数百ｋｍ程度のごく狭い範囲なので、地球上に細い帯状の皆既日食帯をつくる。部分日食帯は数千ｋｍの幅があり、かなり広い範囲で部分日食を観察できる。2009 年 7 月 22 日の日食では、皆既日食帯は鹿児島県の南の海上にあり、九州本土はわずかに逸れるので皆既日食とならない。しかし日本の全ての範囲で部分日食を観察できる。

---

1 月と地球の軌道は楕円なので、太陽も月も見かけの大きさが少し変化する。月が近い位置にあると大きく見えるので皆既日食になりやすい。金環日食はその逆である。

０－２．角度・時間の表し方

以下の計算では、角度、時間、位置など複数の、しかも混乱しやすい数値を扱うので、少し計算練習を行う。

観測地点の経度と緯度、月影中心線（後述）の指し示す方向、暦表時角などは角度で表される。角度は度（°）、分（’）、秒（”）という単位であらわす。１度＝60 分、１分＝60 秒という 60 進法であり、細かい角度を表すために分と秒を使う。以下の計算では角度の秒（”）まで、あるいは度の小数点以下４桁まで詳しく調べることが必要である。以下に、計算の練習問題を３つ示す。

練習１：ある地点の緯度は 31°8’37.1”だった。これを度（°）の単位で表せ。

答：31 + 8/60 + 37.1/3600 = 31.1436°

練習２：ある地点の経度は 131.4692 度だった。これを度分秒の単位で表せ。

答：角度の整数部分を引く　131.4692-131=0.4692°

度の小数部分を 60 倍すると分の単位となる　0.4692° = 0.4692×60’ = 28.152’

分の小数部分を 60 倍すると秒の単位となる　0.152’ = 0.152×60” = 9.12”

∴131.4692°＝131°28’9.1”（秒の少数の最後の桁は細かすぎて意味がないので省略した）

練習３：北緯 34.1469 度の地点から北に 25 秒移動した地点の緯度を求めよ。

答１：34.1469 + 25/3600 = 34.1538 度

答２：34.1469 度 = 34 度 8 分 48.84 秒であり、

34 度 8 分 48.84 秒 + 25 秒 = 34 度 9 分 13.8 秒

（秒の少数の最後の桁は細かすぎて意味がないので省略した）

時間も角度によく似た 60 進法を用いる。すなわち１時間＝60 分、１分＝60 秒である。分、秒は角度と同じ表現なので、混乱しないように注意が必要である。以下に計算問題を２つ示す。

練習１：12 時 34 分 56 秒から 6 時間 53 分 12 秒後の時間を求めよ。

答：12 時 34 分 56 秒 + 6 時間 53 分 12 秒 = 19 時 18 分 08 秒

練習２：練習１で計算した時刻を、時間の少数、日の少数で表せ。

答：19 時 18 分 08 秒 = 19 + 18/60 + 8/3600 = 19.3022 時

19.3022 時 = 19.3022/24 = 0.80426 日

０－３．sin x, cos x から角度 x を求める方法

角度 x が与えられたとき $\sin x$、$\cos x$ を計算することは、電卓やパソコンを使えば簡単にできる。逆に、$\sin x$ や $\cos x$ という値が与えられたときに、角度 x を計算することも可能である。このとき、逆三角関数（arc 関数）を使う。例えば正弦関数 sin と逆正弦関数 arcsin は次の関係がある。

$\sin x = y$ のときに $x = \arcsin y$

逆正弦関数を $\sin^{-1}$ と表記することもある。$y = \sin x$ の両辺に $\sin^{-1}$ を操作すると

$$\sin^{-1}(y) = \sin^{-1}(\sin x) = x$$

である。同様に、cos の逆関数は arccos（$\cos^{-1}$）、tan の逆関数は arctan（$\tan^{-1}$）である。これらの逆三角関数は普通の関数電卓やパソコンのソフトウェアで利用できる。

練習：関数電卓やパソコンを使って次の x の値を計算せよ。

１．$\sin x = 0.5$　　２．$\cos x = 0.5$　　３．$\tan x = 1$

角度から三角関数の値を計算するのと異なり、逆三角関数を使って角度を求める場合には注意が必要である。例えば、$\sin x = 0.5$ から x を求めようとすると $x = 30^\circ$、150° という２つの解がある。しかもこれらに 360° を足した 390°、510° なども解である。

角度 x の範囲を $0 \le x \le 360^\circ$ と限定したとしても２つの解があるので、解を１つに決定するために、$\sin x$ だけでなく $\cos x$ を別の方法で求める[2]ことが必要である。例えば $\sin x = 0.5$ かつ $\cos x = -0.866$ なら、$x = 150^\circ$ と決定できる。

実際の計算では、arctan を使うことが多いので、その計算方法を示す。$0 \le x \le 360^\circ$ とする。

まず、$\sin x$ と $\cos x$ から $\tan x = \sin x / \cos x$ によって $\tan x$ を得る。次に $\arctan(\tan x) = x$ によって x を計算する。こうして得られた x の値は $-90 \le x \le 90^\circ$ の範囲である。これを $0 \le x \le 360^\circ$ の範囲とするために次の手順で補正をする。

1. $\cos x < 0$ の場合は、計算で求めた x に 180° を足す（第２、第３象限の場合）
2. $\cos x > 0$ かつ $\sin x < 0$ の場合は、計算で求めた x に 360° を足す（第４象限の場合）

この手続きの意味は、単位円を描いてみると理解できる（図２）。

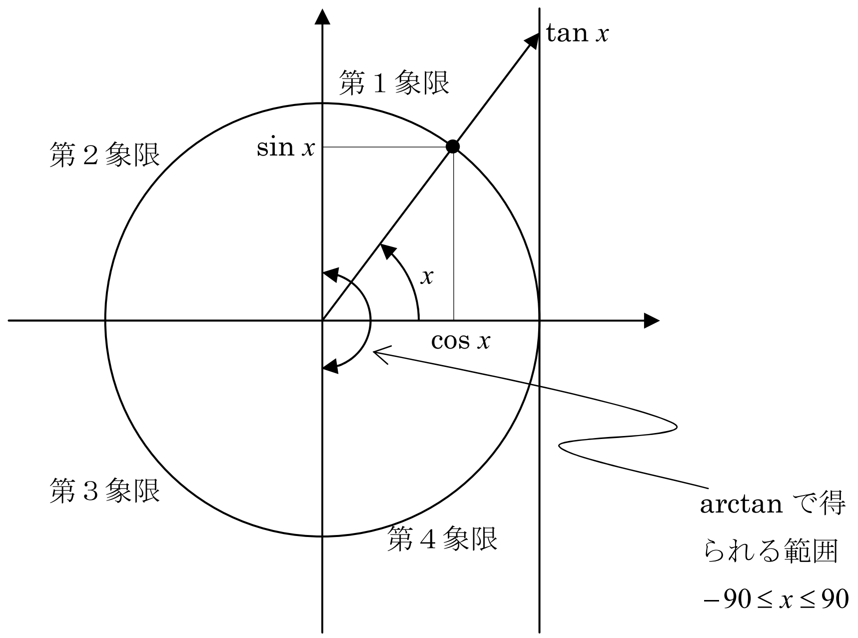


図２．象限図

計算例： $\sin x = -0.866$、$\cos x = -0.5$ **の場合の x を求めよ。**

答　x = 240°

[2] $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ の公式を使って $\cos x$ を求める方法は、この場合には使えない。「別の」方法が必要である。

０－４．度とラジアン

以下で説明する内容において、ほとんどの場合において角度は度で表されているが、太陽面の欠けた割合を計算する場合などラジアンで表した角度が必要になることがある。また、関数電卓で計算した arctan などの値はラジアンで表されていることが多い。度とラジアンの関係と変換方法を以下に示す。

・　関係式　$\dfrac{x\left[^\circ\right]}{180}=\dfrac{x\left[\mathrm{rad}\right]}{\pi}$

・　ラジアンから度への変換　$x\left[^\circ\right]=\dfrac{180}{\pi}x\left[\mathrm{rad}\right]$

・　度からラジアンへの変換　$x\left[\mathrm{rad}\right]=\dfrac{\pi}{180}x\left[^\circ\right]$

練習１：ラジアンで表された次の値を度で表せ。　1　0.5236　1.2566

答：それぞれ 57.3 度、30 度、72 度

練習２：度で表された次の値をラジアンで表せ。　1 度　45 度　114.6 度

答：それぞれ 0.01745、0.7854、2

（１）ベッセル日食要素

太陽と月の位置関係を、日食の計算に便利な数表の形に表したものがベッセル[3]日食要素である。2009 年 7 月 22 日のベッセル日食要素を表１に示す。これは海上保安庁が発行する天体位置表をもとに作成したものである。

地球の中心から見た太陽の方向と距離、月の方向と距離の値がわかれば、それからベッセル日食要素の値を計算して求めることができる。しかし、太陽、月、地球の位置関係を正確に計算するのは極めて困難なので、専門の研究機関（ＮＡＳＡ、海上保安庁、国立天文台など）が作成して公表するベッセル日食要素を使って、我々の計算を行うことにする。

１－１．力学時、日本標準時、ΔT

表１に示したベッセル日食要素表について順に説明する。左端の力学時とは、天体の位置を計算するときに使われる時間であり、日本で使われている時間（日本標準時ＪＳＴ[4]）から約９時間遅れている。力学時のちょうど０時（0h 0m 0s）は、日本標準時では約９時であるが、正確には、9h 0m 0s – ΔT である。ΔT（デルタ・ティー）とは、地球の自転が少しずつ遅くなっている効果を表す時間（単位は秒）である。ΔT は１年に１秒ほど増えていき、2009 年にはおよそ 66 秒とされているので、以下の計算でもΔT = 66 秒として計算を行う[5]。したがって力学時の 0h 0m 0s は、日本標準時では 8h 58m 54s である。

１－２．日食要素の幾何学的関係

以下の要素は図３と図４を参照しながら説明する。まず太陽と月の中心を結ぶ線を考え、これを月の影の中心線（月影中心線）と呼ぶ。地球の中心（地心）を含み月影中心線に垂直な面を考え、これを日食基準面と呼ぶ。地心を原点として、基準面上にＸＹ座標、月影中心線の方向をＺ軸とするＸＹＺ直交座標系（日食の基準座標系）を作る。ただし、基準面と地球の赤道面の交線をＸ軸（東側がＸ軸正の向き）、Ｙ軸正の向きは北の方向、Ｚ軸正の方向は月の方向とする。

ベッセル日食要素の影の位置（x, y）は、日食基準面上の月影中心線の位置である。単位は地球の赤道の半径である（6378.140 km を１とする）。影の方向（d, μ）は、月影中心線を太陽の方向へ延ばした天球面上の方向（赤緯 d と暦表時角 μ[6]）である。赤緯 d は、sin d, cos d として表に与えられている。暦表時角は地球の自転と天体の位置関係をあらわす値である。これらの詳しい説明は付録に示した。影の半径（l_1, l_2）[7]は、基準面上での半影と本影それぞれの半径を表している。単位はやはり地球の半径である。月影中心線と本影が交わった先の半径を正、交わる前は負と定義しているため、本影の半径が負の値となっている。影の角度（tan f_1, tan f_2）は、それぞれ半影、本影の角度（のタンジェント）である。

日食基準面に平行で、観測者を含む平面を観測者基準面と呼ぶ。観測者基準面における月の影に観測者が入っていれば日食となる。以下の計算では、観測者基準面上の月の影と観測者の位置関係を調べることになる。

なお以下の計算では、太陽も月も円形であると仮定されている。太陽は円形と仮定してよいが、月には表面に大きなクレーターや山脈により数ｋｍもの凸凹がある。月面の凸凹による誤差は後で考慮する。

---

3 ベッセルは１９世紀に活躍した天文学者。日食の予報を解析的な計算で行う工夫をし、ベッセル日食要素を開発した。恒星（白鳥座６１番星）の年周視差を初めて測定、物理数学に現れるベッセル関数の研究など、多くの研究業績がある。

4 法律上は中央標準時という。

5 厳密な値は地球の自転を測定しなければわからない。しかしΔT = 66 秒として誤差は１秒以下である。

6 μ ：ミューと読む。

7 読み難いが、これはエルである。

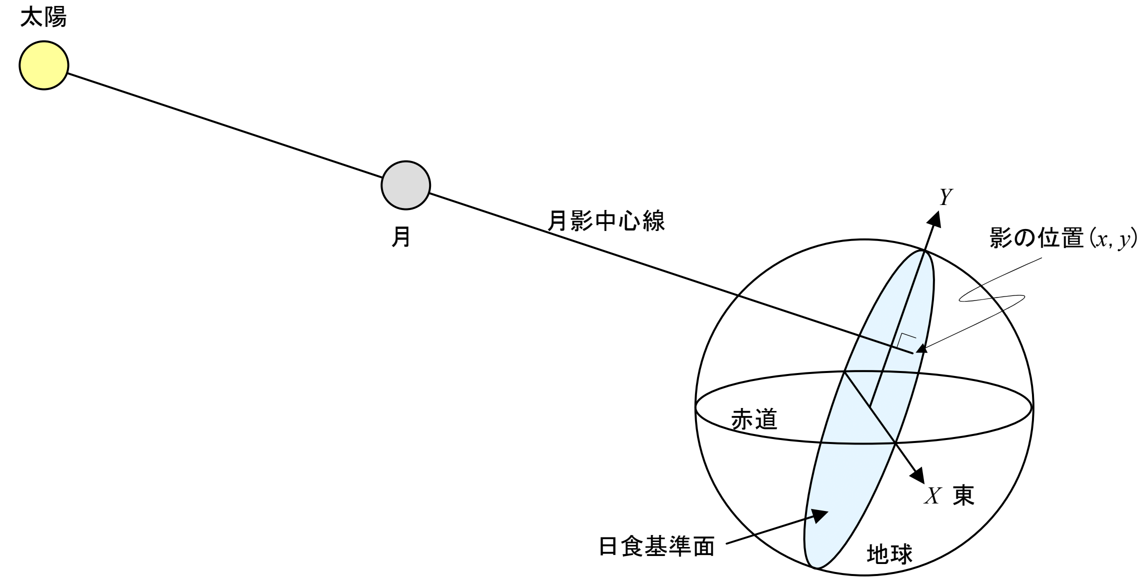


図３．日食の太陽・月・地球の位置関係と日食基準面

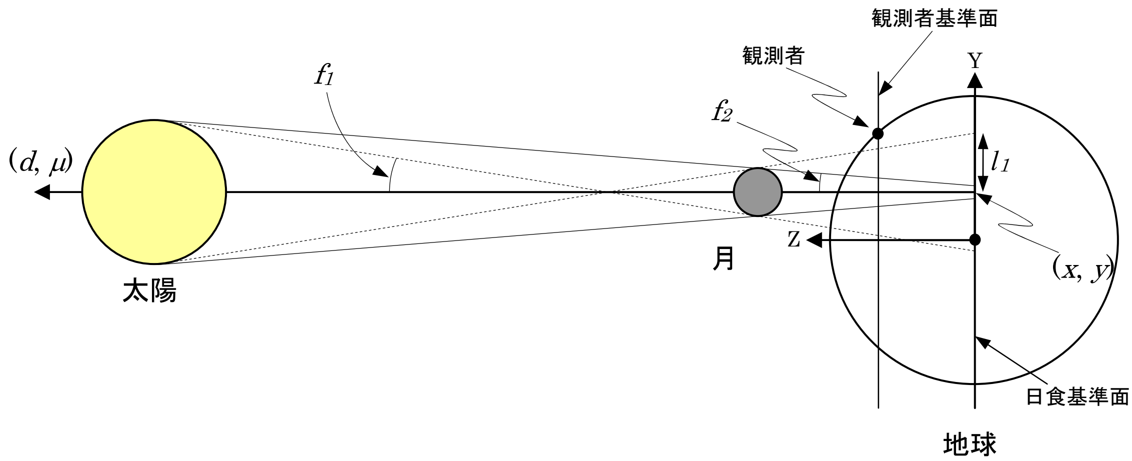


図４．日食要素の幾何学的意味

この例では、観測者は月の影（半影、本影とも）に入っていないので、日食になっていない。

表１．ベッセル日食要素表（2009 年 7 月 22 日の日食）

力学時			影の座標		影の方向						影の半径		半影角	本影角
					赤緯 d		暦表時角 μ							
h	m	s	x	y	$\sin d$	$\cos d$	°	'	"	°	l_1	l_2	$\tan f_1$	$\tan f_2$
0	0	0	-1.429347	0.527709	0.346736	0.937963	178	23	6.8	178.3852	0.530312	-0.015993	0.004601	0.004578
0	10	0	-1.336599	0.498277	0.346715	0.937971	180	53	7.4	180.8854	0.530326	-0.015980	0.004601	0.004578
0	20	0	-1.243849	0.468836	0.346693	0.937978	183	23	8.0	183.3856	0.530338	-0.015967	0.004601	0.004578
0	30	0	-1.151099	0.439386	0.346672	0.937986	185	53	8.6	185.8857	0.530351	-0.015955	0.004601	0.004578
0	40	0	-1.058347	0.409927	0.346651	0.937994	188	23	9.2	188.3859	0.530362	-0.015944	0.004601	0.004578
0	50	0	-0.965595	0.380460	0.346629	0.938002	190	53	9.8	190.8861	0.530373	-0.015933	0.004601	0.004578
1	0	0	-0.872843	0.350983	0.346608	0.938010	193	23	10.4	193.3862	0.530383	-0.015923	0.004601	0.004578
1	10	0	-0.780091	0.321499	0.346586	0.938018	195	53	11.0	195.8864	0.530392	-0.015914	0.004601	0.004578
1	20	0	-0.687339	0.292006	0.346565	0.938026	198	23	11.6	198.3866	0.530400	-0.015906	0.004601	0.004578
1	30	0	-0.594588	0.262504	0.346543	0.938034	200	53	12.2	200.8867	0.530408	-0.015898	0.004601	0.004578
1	40	0	-0.501838	0.232994	0.346522	0.938042	203	23	12.8	203.3869	0.530415	-0.015891	0.004601	0.004578
1	50	0	-0.409089	0.203477	0.346501	0.938050	205	53	13.4	205.8871	0.530422	-0.015884	0.004601	0.004578
2	0	0	-0.316341	0.173951	0.346479	0.938058	208	23	14.0	208.3872	0.530427	-0.015879	0.004601	0.004578
2	10	0	-0.223595	0.144417	0.346458	0.938066	210	53	14.6	210.8874	0.530432	-0.015874	0.004601	0.004578
2	20	0	-0.130850	0.114875	0.346436	0.938074	213	23	15.2	213.3876	0.530436	-0.015870	0.004601	0.004578
2	30	0	-0.038108	0.085325	0.346415	0.938081	215	53	15.8	215.8877	0.530440	-0.015866	0.004601	0.004578
2	40	0	0.054631	0.055768	0.346393	0.938089	218	23	16.4	218.3879	0.530443	-0.015863	0.004601	0.004578
2	50	0	0.147369	0.026203	0.346372	0.938097	220	53	17.0	220.8881	0.530445	-0.015861	0.004601	0.004578
3	0	0	0.240103	-0.003370	0.346350	0.938105	223	23	17.6	223.3882	0.530446	-0.015860	0.004601	0.004578
3	10	0	0.332834	-0.032950	0.346329	0.938113	225	53	18.2	225.8884	0.530447	-0.015859	0.004601	0.004578
3	20	0	0.425561	-0.062537	0.346307	0.938121	228	23	18.8	228.3886	0.530447	-0.015859	0.004601	0.004578
3	30	0	0.518285	-0.092132	0.346286	0.938129	230	53	19.4	230.8887	0.530446	-0.015860	0.004601	0.004578
3	40	0	0.611004	-0.121734	0.346264	0.938137	233	23	20.0	233.3889	0.530445	-0.015861	0.004601	0.004578
3	50	0	0.703720	-0.151343	0.346243	0.938145	235	53	20.6	235.8891	0.530443	-0.015863	0.004601	0.004578
4	0	0	0.796431	-0.180959	0.346221	0.938153	238	23	21.2	238.3892	0.530440	-0.015866	0.004601	0.004578
4	10	0	0.889137	-0.210582	0.346200	0.938161	240	53	21.8	240.8894	0.530436	-0.015870	0.004601	0.004578
4	20	0	0.981838	-0.240212	0.346178	0.938169	243	23	22.4	243.3896	0.530432	-0.015874	0.004601	0.004578
4	30	0	1.074534	-0.269849	0.346157	0.938177	245	53	23.0	245.8897	0.530427	-0.015879	0.004601	0.004578
4	40	0	1.167225	-0.299492	0.346135	0.938185	248	23	23.6	248.3899	0.530421	-0.015885	0.004601	0.004578
4	50	0	1.259909	-0.329142	0.346114	0.938193	250	53	24.2	250.8901	0.530415	-0.015891	0.004601	0.004578

（海上保安庁発行『天体位置表』2009 年版を参照して作成した）

（２）観測地点の経度・緯度・標高と準備計算

２－１．観測地点の記述

地球上の観測地点をあらわすには、経度Λ（ラムダ）、緯度φ（ファイ）、標高ｈを使う。

経度はイギリスのグリニッジを通る子午線を$\Lambda = 0°$として角度であらわす。日本は兵庫県の西明石を$\Lambda = 135°$の子午線が通る。山口県の経度はおよそ$\Lambda = 131°$である。緯度は赤道を 0 度、北極を北緯 90 度（$\varphi = 90°$）としてあらわす。山口県はおよそ$\varphi = 34°$である。標高はメートル（m）であらわす。

実験や観測はできるだけ高精度に行うべきである。したがって経度と緯度は 1”（角度の秒）以下、標高は 1 m の精度で測定することが望ましい（しかし目標の計算精度が時間の１秒という今回の計算では、角度で数秒、標高は 100 m の誤差があっても結果に影響しないので、あまり神経質にならなくても良い）。

２－２．観測地点の位置を知る３つの方法

観測地点の経度、緯度、標高を知るには、国土地理院発行の地図を使って読み取るのが古典的な方法である。しかし現代ではＧＰＳなどの便利な道具が普及しているので、簡便な方法から順に３通り説明する。

方法１：ＧＰＳの利用

ＧＰＳ受信機を使って、経度と緯度を調べる。できれば標高も調べる。登山用品店などで携帯型のＧＰＳ受信機が販売されているし、最近では携帯電話にもＧＰＳ受信機能があるので、利用できるかもしれない。

ＧＰＳ受信機を利用する際に注意すべきことは、適切な測地の座標系の選択である。世界測地系、ITRF、WGS といった名前の座標系を用いればよい。日本測地系、東京測地系は、厳密に言えば今回の計算には不適切である（ただし、上記の通り実質的にはどの座標系を使ってもよい）。

> **練習：ＧＰＳが利用できるなら、自分がいる位置の経度と緯度を調べよ。また、その値を度の単位で表せ。可能なら標高も調べよ。**

図５．小型ＧＰＳ受信機（GARMIN 社の etrex vista）

矢印部分の表示から、経度＝131° 28’ 09.1”、緯度＝34° 08’ 49.0” と読み取れる。

方法２：Web のサービスの利用

国土地理院の地図閲覧サービス「ウォッちず」(http://watchizu.gsi.go.jp/index.html)、電子国土ポータルサイト（http://portal.cyberjapan.jp/index.html）など Web 上の地図サービスを使って、観測地点の位置と標高を調べる。ウォッちずや電子国土の場合、標高は地図上の等高線から読み取る。

例：山口大学理学部の玄関の位置を読み取る。電子国土が表示する地図の中心に観測地点をあわせ、左下の「座標」ボタンを押すと、経度・緯度が数値として示される。図４より、山口大学理学部の玄関の位置は東経 131 度 28 分 9 秒、北緯 34 度 8 分 49 秒（東経 131.4692 度、北緯 34.1469 度）と得られた。地図に示された等高線により、標高は 20m より少し高いことがわかる。ここでは 22m と読み取った。

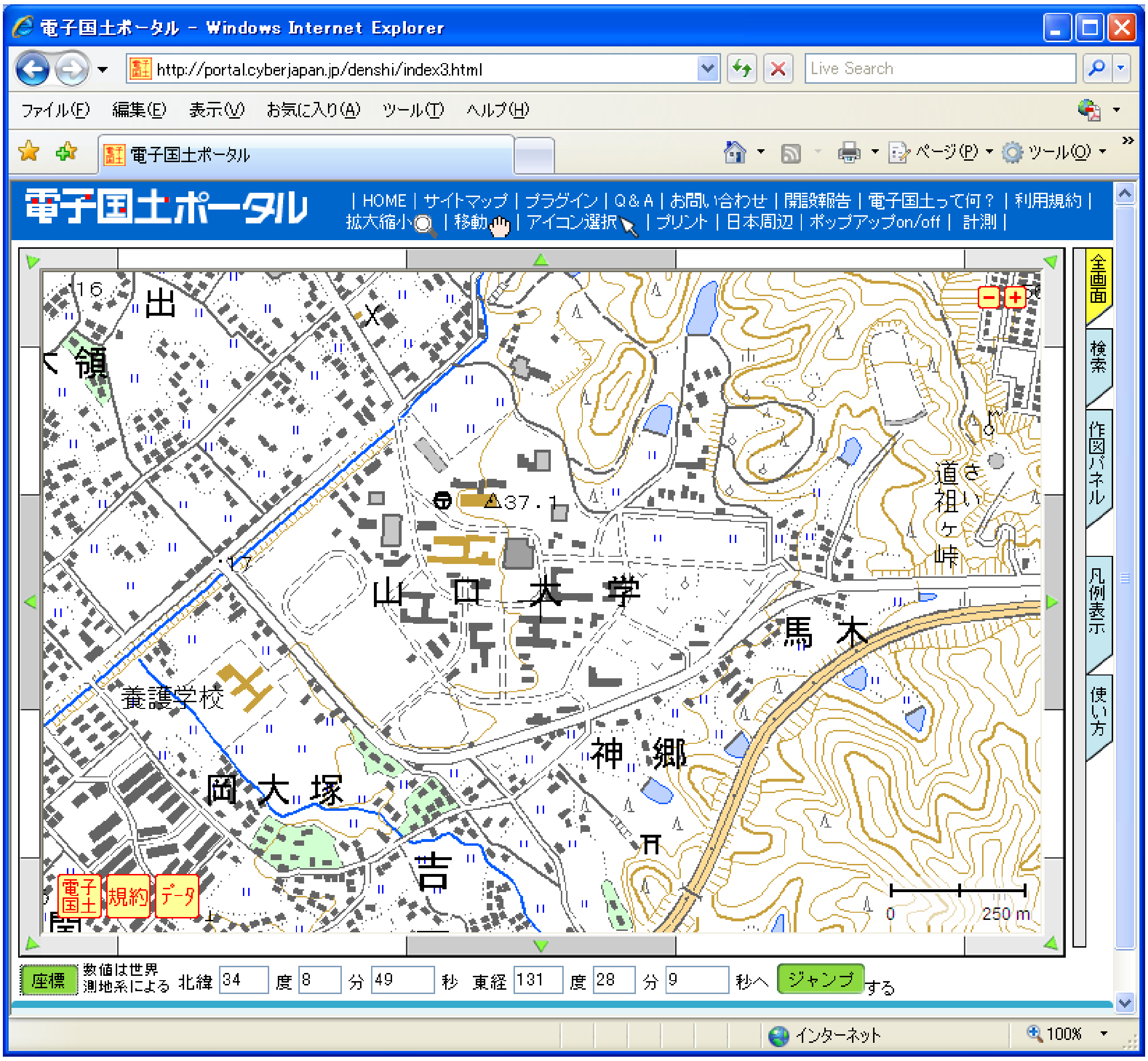


図６．電子国土の画面の例（出典：「電子国土」URL http://cyberjapan.jp/）

方法３：地図の利用

国土地理院発行の２万５千分の１の地図や５万分の１の地図を使い、観測地点の経度・緯度・標高を調べることが出来る。これらの地図は本屋に問い合わせれば入手できる。経度・緯度の測定方法は、以下の練習問題を参考にせよ。

練習問題：５万分の１の地図（小郡）で調べたところ、Ａ地点（山口大学理学部の玄関）は図７に示す位置にあった。この地図は経度 131°14’51.3”～131°29’51.3”の範囲（15’）、緯度 34°0’11.7”～34°10’11.7”の範囲（10’）を含んでいる。Ａ地点は地図の左端から 408.0 mm、右から 52.5 mm、下から 318.5 mm、上から 51.5 mm のところにある。これから、Ａ地点の経度と緯度を計算せよ。

解：経度の測定は、地図の左側を基準として、地図の左右の長さ 460.5 mm と経度の差 15’を使って、比例で計算する。

地図の左端から測った経度 $\Delta\lambda = \dfrac{408.0}{408.0+52.5}\times 15' = 13.2899' = 13'17.4''$

Ａ地点の経度＝131°14’51.3” + 13’17.4” = 131°28’8.7”

緯度の測定は、地図の下側を基準として、地図の上下の長さ 370.0 mm と緯度の差 10’を使う。

地図の下端から測った緯度 $\Delta\varphi = \dfrac{318.5}{318.5+51.5}\times 10' = 8.6081' = 8'36.5''$

Ａ地点の緯度＝34°0’11.7” + 8’36.5” = 34°8’48.2”

となる。

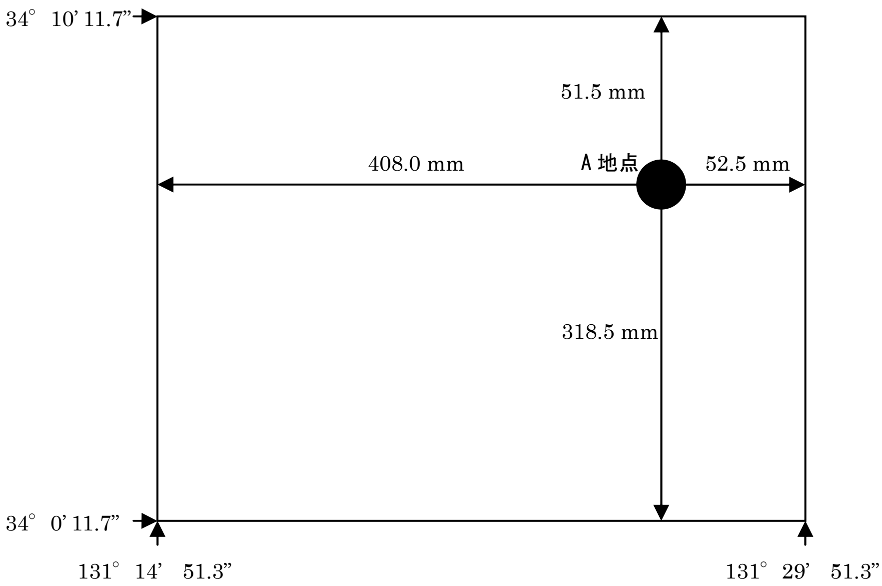


図７．国土地理院発行５万分の１地図「小郡」

※周囲の経度・緯度に黒色と茶色の２種類の数値がある場合、茶色の数値（世界測地系）を使う。2002 年 3 月以前に発行された古い地図は日本測地系の座標で示されていて、厳密には今回の計算には不適切である（しかし、実質的には古い座標系でも問題ない）。

２－３．暦表経度の計算

地図などを使って読み取った経度をΛo、緯度をφ とする。緯度φ は以後の計算でそのまま使えるが、経度には補正が必要である。

すでに述べたとおり、地球の自転は少しずつ遅くなっている。この効果を補正するために、ＧＰＳや地図で測定した観測地点の経度Λo に補正を加えた暦表経度Λという経度を使う。暦表経度は次の式で計算する。

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Lambda_o - (1.0027397 \times 15 \times \Delta T)'' \\ &= \Lambda_o - (15.0410685 \times \Delta T)''\end{aligned}$$

括弧（）に記号 ” がついているのは、カッコ内の計算で得られる数値は角度の秒という意味である。上述のとおりΔT = 66 秒（これは時間の秒）である。

計算例：山口大学理学部の玄関の位置の暦表経度を計算する。地図で測定した経度Λo = 131° 28’ 9” と ΔT = 66 秒を使い、

Λ= 131° 28’ 9” - (15.0410685 x 66)”

= 131° 28’ 9” - 992.7”

= 131° 28’ 9” - 16’ 32.7”

= 131° 11’ 36.3”

= 131.1934°

２－４．ＳとＣの計算

地球表面にいる観測者の位置を計算する。地球は完全な球ではなく、ほんのわずかだが南北にひしゃげた扁平形をしている。この形によるずれを補正するために、ＳとＣという２つの係数が必要となる。この計算に必要な値は緯度φ と標高 h（m）である。

ＳとＣの計算は以下の通りである。

$$\begin{aligned}S_0 &= 0.99497430 - 0.00167078\cos 2\varphi + 0.00000210\cos 4\varphi \\ C_0 &= 1.00167993 - 0.00168204\cos 2\varphi + 0.00000212\cos 4\varphi\end{aligned}$$

こうして得られた S_0 と C_0 に対し、次の式で標高の補正を行う。

$$\begin{aligned}S &= S_0 + 0.0000001568h \\ C &= C_0 + 0.0000001568h\end{aligned}$$

ＳとＣは以下の計算では必ず$S\sin\varphi$、$C\cos\varphi$としてあらわれるので、これを１つの値としてあらかじめ計算しておく。以下の計算例を参考にせよ。

計算例：山口大学理学部の玄関の位置のＳとＣを計算する。地図で測定した緯度φ = 34 度 8 分 49 秒と標高 h = 22 m を使う。まず、φ = 34° 8’ 49” から

φ = 34.1469° 、2φ = 68.2937° 、4φ= 136.5875° である。これらを使って

$$S_0 = 0.99497430 - 0.00167078\cos(68.2937) + 0.00000210\cos(136.5875) = 0.994355$$
$$C_0 = 1.00167993 - 0.00168204\cos(68.2937) + 0.00000212\cos(136.5875) = 1.001056$$

標高の補正

$$S = 0.994355 + 0.0000001568 \times 22 = 0.994358$$
$$C = 1.001056 + 0.0000001568 \times 22 = 1.001060$$

一方、

$$\sin\varphi = 0.561317$$
$$\cos\varphi = 0.827601$$

である。これらから

$$\mathrm{S}\sin\varphi = 0.558149$$
$$\mathrm{C}\cos\varphi = 0.828478$$

を得る。

ここまでの計算で得られた数値をまとめてみよう。

- 観測地点＝山口大学理学部玄関前
- ＧＰＳや地図で読み取った観測地点の位置
  - 経度　Λo = 131° 28’ 9”
  - 緯度　φ = 34° 8’ 49” = 34.1469°
  - 標高　h = 22 m
- 地球の自転の遅れΔT を考慮して計算した暦表経度Λ
  - Λ ＝ 131° 11’ 36.3” = 131.1934°
- 地球の扁平形を補正する係数
  - Ｓ＝0.994358、Ｓsin φ = 0.558149
  - Ｃ＝1.001060、Ｃcos φ = 0.828478

これで準備計算は終了である。以下の計算で使うのは下線を引いた３つの数値である。

（３）観測地点と月の影の位置関係

３－１．観測地点の位置

図８に**観測地点と月の影の位置関係**を示した。日食の基準座標系における観測者の位置（ξ, η, ζ）[8]は、ベッセルの日食要素表から読み取ったある時刻の d と μ の値と、観測地点の暦表経度Λ、$S\sin\varphi$、$C\cos\varphi$ を使って、以下の式で計算できる。

$$\xi = C\cos\varphi\sin(\mu+\Lambda)$$
$$\eta = S\sin\varphi\cos d - C\cos\varphi\sin d\cos(\mu+\Lambda)$$
$$\varsigma = S\sin\varphi\sin d + C\cos\varphi\cos d\cos(\mu+\Lambda)$$

３－２．基準面上の影の位置

ベッセルの日食要素表から $x, y, l_1, l_2, \tan f_1, \tan f_2$ を読み取り、上の計算で得られた（ξ, η, ζ）を用いて、観測者基準面における影の半径 L_1 と L_2、観測者と月影中心線の距離（月影距離）Δを計算する。L_2 は負の値になることがある（１－２を参照)。

$$L_1 = l_1 - \varsigma\tan f_1$$
$$L_2 = l_2 - \varsigma\tan f_2$$
$$\Delta^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$
$$\Delta = \sqrt{\Delta^2}$$

影の縁と観測者の距離に関するパラメータ Q_1 および Q_2 を次の式で計算する。

$$Q_1 = L_1^2 - \Delta^2 \qquad Q_2 = L_2^2 - \Delta^2$$

$Q_1 < 0$ の場合、観測者は半影に入っていないので部分日食になっていない。$Q_1 > 0$ の場合は部分日食になっている。さらに $Q_2 > 0$ なら皆既日食になっている。Q が大きいほど太陽は深く欠けていることを意味する。Q_1 および Q_2 を日食判定値と呼ぶ[9]。

最初に $Q_1 = 0$ となる時刻が欠け始め、すなわち部分日食の始まりであり、これを第一接触とよぶ。再び $Q_1 = 0$ となって以後は $Q_1 < 0$ となる時刻が日食の終りであり、これを第四接触と呼ぶ。皆既日食（または金環日食）が観察される場合は $Q_2 = 0$ となる時刻が２回あり、それぞれ第二接触、第三接触と呼ばれる。皆既日食の場合は、これらの瞬間にダイヤモンドリングが観察される。

---

8 ξ（グザイ）、η（エータ）、ζ（ゼータ）。この式の導出にはφ, d, μ, Λ の幾何学的な関係を理解する必要があるので、ここでは省略する。

9 この名称はこの文章の中だけで使用する。

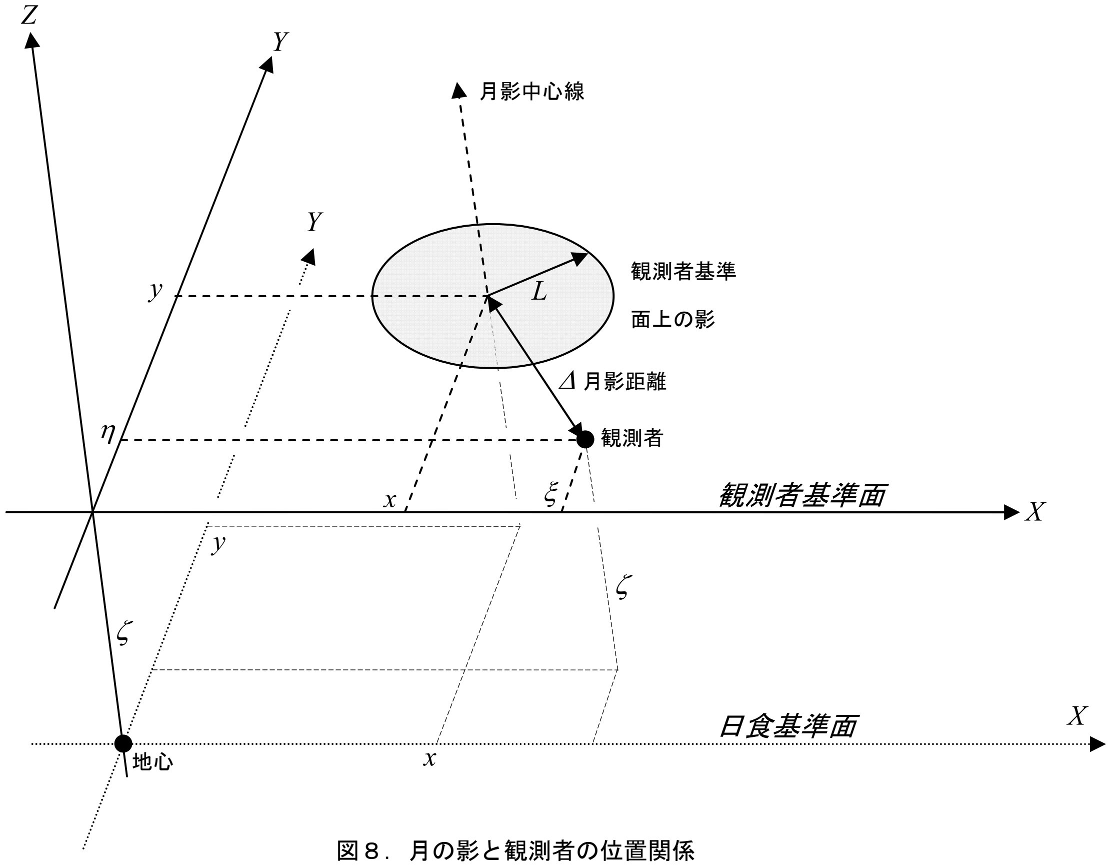


図８．月の影と観測者の位置関係

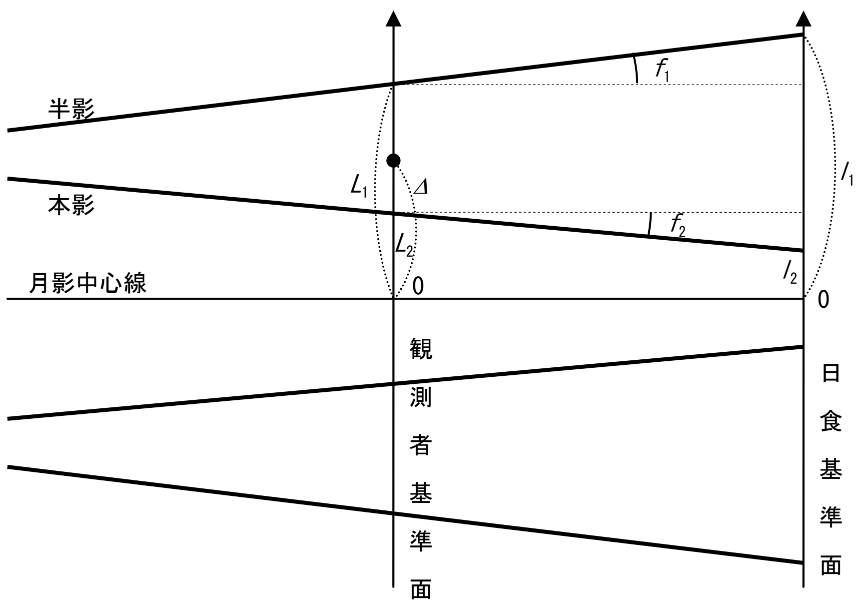


図９．月の影の大きさと観測者の位置

計算例：力学時0時0分0秒における値を計算する。

ベッセル日食要素表より

$x = -1.429347$

$y = \ 0.527709$

$\sin d = 0.346736$

$\cos d = 0.937963$

$\mu = 178°\ 23'\ 06.8'' = 178.3852°$

$l_1 = \ 0.530312$

$l_2 = -0.015993$

$\tan f_1 = 0.0046013$

$\tan f_2 = 0.0045784$

観測地点の暦表経度を計算する。

$\mu + \Lambda = 309.5786°$

$\sin(\mu + \Lambda) = -0.770751$

$\cos(\mu + \Lambda) = \ 0.637136$

また

$$S\sin\varphi = 0.558149$$
$$C\cos\varphi = 0.828478$$

これから順に、

$$\xi = -0.638550$$
$$\eta = 0.340497$$
$$\varsigma = 0.688637$$

$L_1 = \ 0.527143$

$L_2 = -0.019146$

$\Delta = \ 0.812655$

$Q_1 = -0.382529$

$Q_2 = -0.660043$

が得られる。$Q_1 < 0$ なので、力学時0時0分0秒には部分日食になっていない（当然ながら $Q_2 < 0$ なので皆既日食にもなっていない）ことがわかる。

表２．山口大学理学部玄関前を観測地とする計算結果

ベッセルの日食要素表の記載値					計算で得た値							
力学時			影の座標		観測者の位置			影の大きさ			日食判定値	
h	m	s	x	y	ξ	η	ζ	L_1	L_2	Δ^2	Q_1	Q_2
0	0	0	−1.429347	0.527709	−0.638549	0.340498	0.688637	0.527143	−0.019146	0.660409	−0.382529	−0.660043
0	10	0	−1.336599	0.498277	−0.614915	0.331030	0.714285	0.527039	−0.019250	0.548799	−0.271029	−0.548428
0	20	0	−1.243849	0.468836	−0.590110	0.321930	0.738942	0.526938	−0.019350	0.448955	−0.171292	−0.448581
0	30	0	−1.151099	0.439386	−0.564182	0.313214	0.762561	0.526842	−0.019446	0.360390	−0.082828	−0.360012
0	40	0	−1.058347	0.409927	−0.537180	0.304900	0.785097	0.526750	−0.019538	0.282645	−0.005180	−0.282264
0	50	0	−0.965595	0.380460	−0.509155	0.297004	0.806507	0.526662	−0.019626	0.215302	0.062071	−0.214917
1	0	0	−0.872843	0.350983	−0.480161	0.289540	0.826751	0.526579	−0.019708	0.157974	0.119311	−0.157586
1	10	0	−0.780091	0.321499	−0.450253	0.282522	0.845789	0.526500	−0.019786	0.110313	0.166890	−0.109921
1	20	0	−0.687339	0.292006	−0.419487	0.275964	0.863585	0.526426	−0.019860	0.072002	0.205123	−0.071608
1	30	0	−0.594588	0.262504	−0.387923	0.269878	0.880106	0.526358	−0.019927	0.042765	0.234288	−0.042368
1	40	0	−0.501838	0.232994	−0.355620	0.264276	0.895320	0.526295	−0.019990	0.022358	0.254629	−0.021959
1	50	0	−0.409089	0.203477	−0.322640	0.259168	0.909198	0.526239	−0.020047	0.010575	0.266352	−0.010173
2	0	0	−0.316341	0.173951	−0.289046	0.254564	0.921713	0.526186	−0.020099	0.007243	0.269628	−0.006840
2	10	0	−0.223595	0.144417	−0.254902	0.250472	0.932842	0.526140	−0.020145	0.012228	0.264595	−0.011822
2	20	0	−0.130850	0.114875	−0.220272	0.246902	0.942563	0.526099	−0.020185	0.025428	0.251353	−0.025020
2	30	0	−0.038108	0.085325	−0.185223	0.243858	0.950858	0.526065	−0.020219	0.046775	0.229969	−0.046367
2	40	0	0.054631	0.055768	−0.149822	0.241347	0.957710	0.526036	−0.020248	0.076241	0.200474	−0.075831
2	50	0	0.147369	0.026203	−0.114135	0.239374	0.963108	0.526013	−0.020270	0.113826	0.162864	−0.113415
3	0	0	0.240103	−0.003370	−0.078231	0.237942	0.967041	0.525996	−0.020287	0.159568	0.117104	−0.159157
3	10	0	0.332834	−0.032950	−0.042178	0.237054	0.969500	0.525986	−0.020298	0.213536	0.063125	−0.213124
3	20	0	0.425561	−0.062537	−0.006045	0.236712	0.970482	0.525981	−0.020302	0.275834	0.000823	−0.275421
3	30	0	0.518285	−0.092132	0.030100	0.236916	0.969984	0.525983	−0.020301	0.346597	−0.069939	−0.346185
3	40	0	0.611004	−0.121734	0.066188	0.237666	0.968008	0.525991	−0.020293	0.425993	−0.149327	−0.425581
3	50	0	0.703720	−0.151343	0.102149	0.238960	0.964556	0.526005	−0.020279	0.514224	−0.237543	−0.513812
4	0	0	0.796431	−0.180959	0.137916	0.240796	0.959636	0.526024	−0.020260	0.611519	−0.334817	−0.611108
4	10	0	0.889137	−0.210582	0.173421	0.243170	0.953257	0.526050	−0.020234	0.718140	−0.441412	−0.717731
4	20	0	0.981838	−0.240212	0.208595	0.246078	0.945430	0.526082	−0.020203	0.834382	−0.557620	−0.833974
4	30	0	1.074534	−0.269849	0.243372	0.249513	0.936172	0.526119	−0.020165	0.960567	−0.683765	−0.960160
4	40	0	1.167225	−0.299492	0.277686	0.253471	0.925499	0.526162	−0.020122	1.097047	−0.820200	−1.096642
4	50	0	1.259909	−0.329142	0.311472	0.257941	0.913432	0.526212	−0.020073	1.244201	−0.967302	−1.243798

（４）各時刻における計算と日食の進行

４－１．各時刻における計算

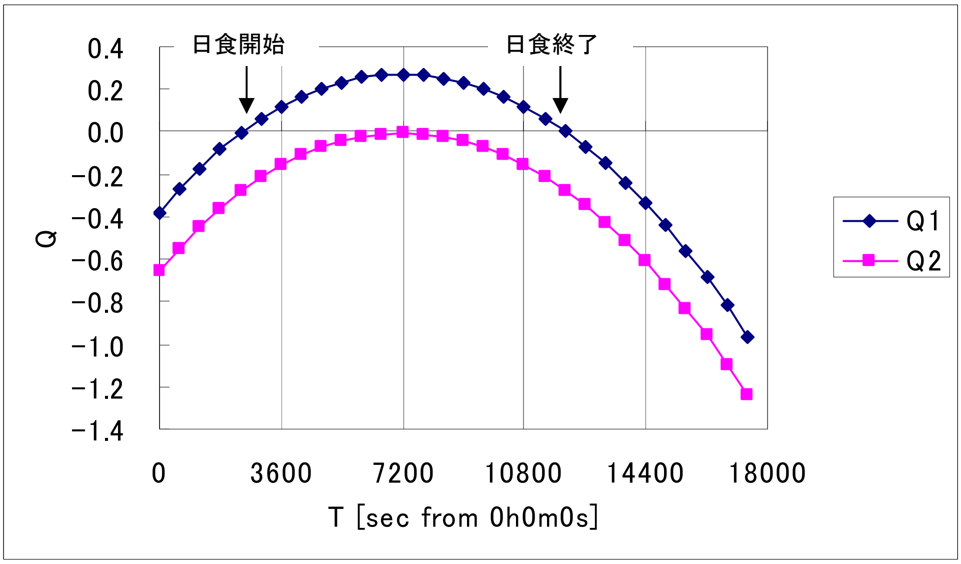
以上の計算をベッセル日食要素表の各時刻について行う。これが日食計算の主要部である。各時刻における影中心の位置（x, y)、観測者の位置（ξ, η, ζ)、影の大きさ（L_1, L_2)、月影距離Δ、日食判定値（Q_1, Q_2）が得られると、これらの値から、日食の開始と終了の時刻（Ts, Te)、もっとも太陽が大きく欠ける時刻（Tm)、欠ける方向（P, V)、食分（欠ける程度、D）などを計算することができる。

山口大学理学部の玄関前を観測地とする計算結果を表２に示す。

４－２．グラフ化

上で説明した計算結果に対して Q の値の変化を調べる。0 時 0 分 0 秒から経過した秒数に対する Q の変化をグラフに示したものが図１０である。上は全体の変化を示し、下は 7200 秒（2 時）前後 1 時間の変化を拡大して示している。

0 時 40 分頃に Q_1 は負から正へ変化するので、この頃に部分日食が始まることがわかる。そして 3 時 20 分頃に正から負へ変化するので、この頃に日食は終わる。この間は部分日食が見られる。Q_1 が最大となるのは 2 時頃であり、この頃に食が最大である。しかし拡大図からわかるように Q_2 は常に負なので、本影には入らない。この観測地点では皆既日食はおきないことがわかる。



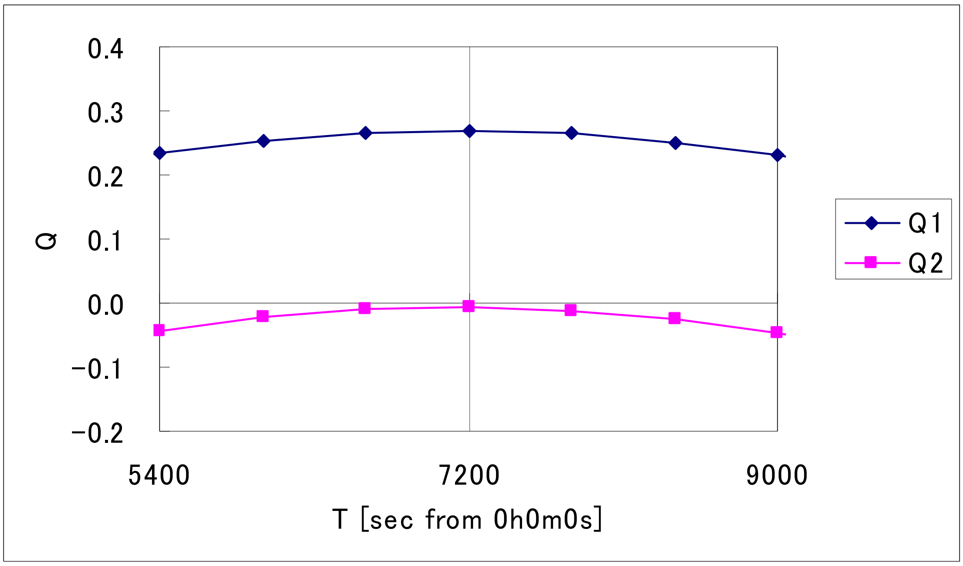


図１０．時刻に対する Q の値の変化。上：全体図、下：2 時前後の拡大図

Q_1 は 2400 秒（0 時 40 分）頃に負から正へ（部分日食始まり）、12000 秒（3 時 20 分）頃に正から負へ（部分日食終り）変化していることがわかる。拡大図（下）から明らかに Q_2 は常に負であり、この観測地点では皆既日食は起きない。

（５）日食の始まり・終りの時刻

５－１．日食の始まりの時刻

日食が始まる時刻 Ts、すなわち Q の値が０になる時刻を正確に求める。計算にはエクセルなどの表計算ソフトウェアを使う方法、階差表を使う古典的な方法などがある。以下ではこの２つの方法について説明する。

方法１：エクセルなどの近似曲線を使う

Qの値が0になる前後の４つの値を取り出し､近似曲線の当てはめ機能を持ったソフトウェアに読み込ませる。このとき、時刻を表すパラメータ（n）は、Q の値が 0 となる直前を $n = 0$、直後が $n = 1$ となるように設定する（表３を参照)。$n = 0$ の時刻を T_0、$n = 1$ の時刻を T_1 とする。ここの例では T_0 = 0 時 40 分 0 秒、T_1 = 0 時 50 分 0 秒である。T_0 と T_1 の間に $Q = 0$ となる n（$0 < n < 1$）があるはずである。

表３．計算結果の一部

力学時	n	Q_1
0 30 0	-1	-0.082828
0 40 0	0	-0.005180
0 50 0	1	0.062071
1 0 0	2	0.119311

このデータを、横軸を n、縦軸を Q_1 としてグラフに描き（図１１)、近似曲線として３次関数を当てはめる（フィッティング、図１２)。当てはめた曲線が 0 になる時刻 n の付近を拡大し、その時刻をグラフから読み取る（図１３)。この例では $n = 0.072$ と読み取れた。この n を用いて、目的の時刻 Ts は

$$T_s = T_0 + n(T_1 - T_0)$$

として得られる。

もう少し詳しく説明すると次のとおり。読み取った n の値は 10 分間を１とした値である。したがって n に 10 分間（=600 秒）をかけ、これを $n = 0$ の時刻 T_0 に足せば、Q が 0 になる時刻（力学時）が得られる。

計算例：n = 0.072 の場合、

$$\begin{aligned} T_s &= 0時40分0秒 + 0.072(50分 - 40分) \\ &= 0時40分0秒 + 0.72分 \\ &= 0時40分0秒 + 43秒 \\ &= 0時40分43秒 \end{aligned}$$

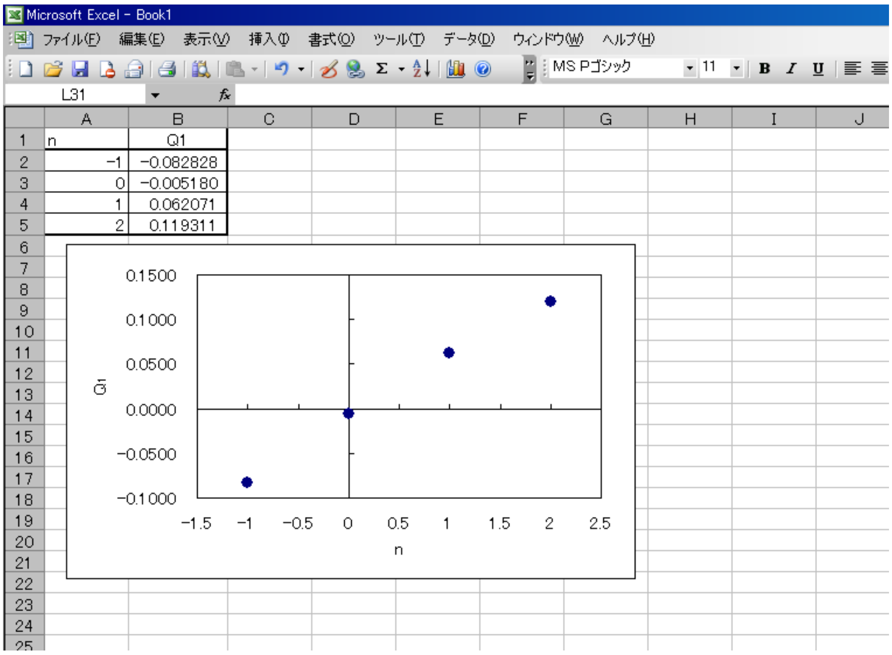


図１１．エクセルでグラフを描いた

最初はグラフに点だけをプロットする。次にグラフ上の点を右クリックし「近似曲線の追加」の画面を選択する。

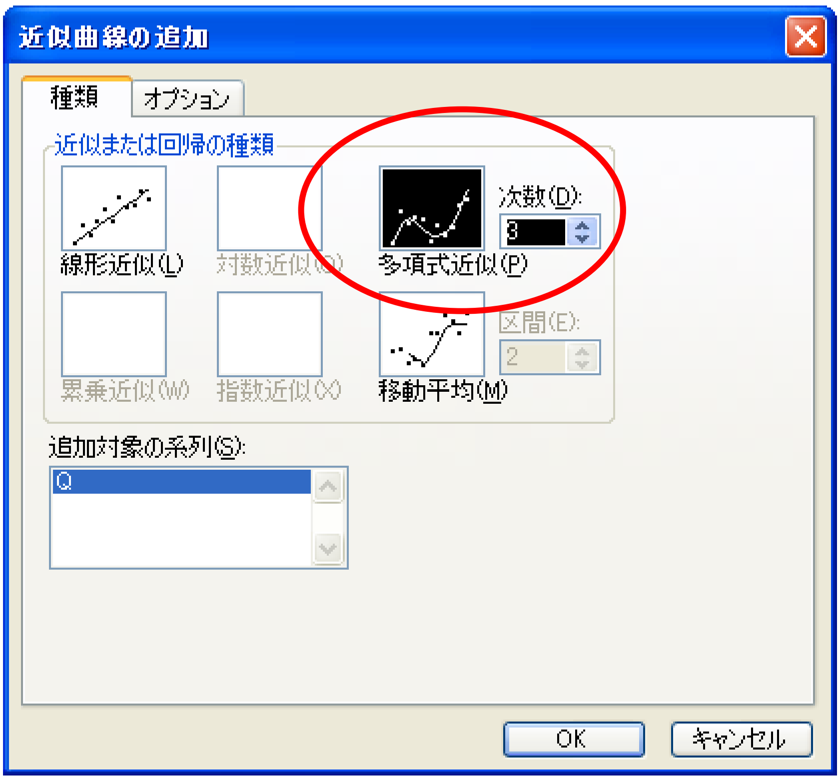


図１２．近似曲線の追加の画面

「多項式近似」を選択し、次数を「３」にする。３次関数を当てはめる、という意味。

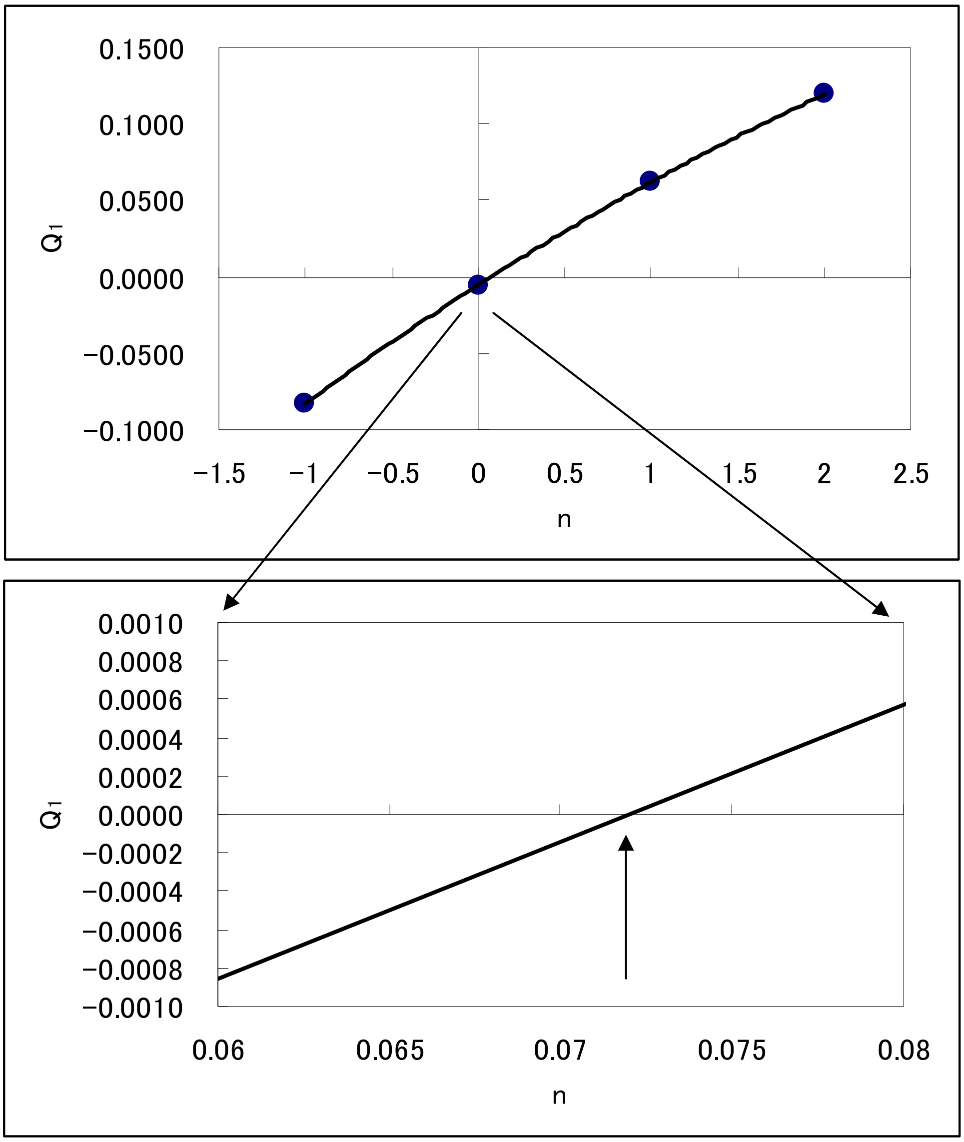


図１３．Qが０となる瞬間を読み取る。上：全体図、下：$Q_1 = 0$ 付近の拡大図。

Qが０となる部分だけグラフを拡大し、その時刻 n を読み取る。この例では $n = 0.072$ と読み取れる。

方法２：階差表を使う逆補間法

○階差表を作る

階差表とは、関数$f(x)$の x と $f(x)$の値を縦に並べ、$f(x)$の上下の値の差を計算し、差の差を計算し、さらに差の差の差を計算し・・・と繰り返した結果の表である。表４に階差表の例を示す。

表４．階差表

x	n	$f(x)$	１差	２差	３差	４差
x_{-2}	−2	$f(x_{-2})$				
			$\delta'_{-3/2}$			
x_{-1}	−1	$f(x_{-1})$		δ''_{-1}		
			$\delta'_{-1/2}$		$\delta'''_{-1/2}$	
x_0	0	$f(x_0)$		δ''_0		δ^{IV}_0
			$\delta'_{1/2}$		$\delta'''_{1/2}$	
x_1	1	$f(x_1)$		δ''_1		δ^{IV}_1
			$\delta'_{3/2}$		$\delta'''_{3/2}$	
x_2	2	$f(x_2)$		δ''_2		
			$\delta'_{5/2}$			
x_3	3	$f(x_3)$				

※$f(x_0)$と$f(x_1)$の間に目的の値があるようにデータを選択する

ただし$\delta'_{1/2}=f(x_1)-f(x_0)$、$\delta''_1=\delta'_{3/2}-\delta'_{1/2}$・・・などである。

$f(x)$が適当な滑らかさを持った関数なら、階差表を使って表にない$f(x)$の値を推定したり（補間法）、$f(x)=a$ となる x の値を推定する（逆補間法）などの計算ができる。ここでは、x に対応する変数として時刻 T、$f(x)$として Q を使って階差表を作り、$Q=0$ となる T の値を推定する逆補間法を説明する。ただし計算を簡単にするため、時刻を直接使わず、パラメータ n を使う。表２の計算結果を使って作った階差表が表５である。

表５．日食開始時刻計算の階差表の例

時刻	n	Q	１差	２差	３差	４差
0h20m0s	−2	−0.171292				
			0.088464			
0 30 0	−1	−0.082828		−0.010816		
			0.077648		0.000419	
0 40 0	0	−0.005180		−0.010397		−0.000033
			0.067251		0.000386	
0 50 0	1	0.062071		−0.010011		−0.000036
			0.057240		0.000350	
1 0 0	2	0.119311		−0.009661		
			0.047579			
1 10 0	3	0.166890				

○計算手順[10]

$Q=0$ となる時刻 T を求める計算手順は以下の通りである。

ステップ０：以下の計算で使う値を書き出しておく。また、次の定数 M を計算する：

Q_0、$\delta'_{1/2}$、$\delta'''_{1/2}$

$$M=\left(\delta''_0+\delta''_1\right)-0.184\left(\delta^{IV}_0+\delta^{IV}_1\right)$$

ステップ１： 次の式で n を計算する：

$$n=-\frac{Q_0}{\delta'_{1/2}}$$

ステップ２：得られた n を使って２つの係数を計算する：

$$B''=\frac{n(n-1)}{4} \qquad B'''=\frac{n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{6}$$

ステップ３：この係数を使って、再び n を計算する：

$$n=-\frac{1}{\delta'_{1/2}}\left[Q_0+B''M+B'''\delta'''_{1/2}\right]$$

ステップ４：判定　ここで得られた n は、前の n に一致したか？

一致していない　→　ステップ２に戻る

一致した　　　　→　ステップ５へ行く

ステップ５：目的の時刻 T は、次の式で得られる：

$$T_s=T_0+n\left(T_1-T_0\right)$$

計算例：

ステップ１

$Q_0=$ -0.005180、$\delta'_{1/2}=0.067251$、$\delta'''_{1/2}=0.000386$

$$\begin{aligned}M&=\left(\delta''_0+\delta''_1\right)-0.184\left(\delta^{IV}_0+\delta^{IV}_1\right)\\&=\left(-0.010397+(-0.010011)\right)-0.184\left(-0.000033+(-0.000036)\right)\\&=-0.0203953\end{aligned}$$

$$n=-\frac{Q_0}{\delta'_{1/2}}=0.0770249$$

ステップ２

$$B''=\frac{n(n-1)}{4}=-0.0177730$$

$$B'''=\frac{n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{6}=0.0050117$$

ステップ３

$$n=-\frac{1}{\delta'_{1/2}}\left[Q_0+B''M+B'''\delta'''_{1/2}\right]=0.0716061$$

ステップ４

10　ここで説明するのはベッセルの逆補間法という計算方法である。このベッセルは日食要素のベッセルと同一人物である。

n = 0.0716061 が前の値（0.0770249）に一致しないので、ステップ２に戻る。

繰り返して計算した結果、n = 0.0719573 となった。以下、同様に計算を繰り返す。得られた n の値を計算回数と共に、表６に示す。

表６．n の計算結果

計算回数	n の値
1	0.0770249
2	0.0716061
3	0.0719573
4	0.0719345
5	0.0719359
6	0.0719358
7	0.0719358
8	0.0719358

７回目に計算結果が前の値に一致（収束）した。これが求める n、すなわち時刻番号 0 と 1 の間で Q が 0 になる時刻を表す（実際には、この n の計算は小数点以下４桁まででよい。したがって４回目の計算結果と５回目の計算結果は 0.0719 で一致しているので、ここで計算をやめてよい）。

ステップ５

$$
\begin{aligned}
&T_s = T_0 + n(T_1 - T_0) \\
&= 0\text{時}40\text{分} + 0.0719358(50-40) \\
&= 0\text{時}40.719\text{分} \\
&= 0\text{時}40\text{分}43\text{秒}
\end{aligned}
$$

これで計算は終りである。ただしこの計算は必要以上に高精度なので、５－３－１に示した簡略な計算方法を用いてもよい。

５－２．力学時から日本標準時への変換

以上の計算で用いた時間は力学時である。我々が時報で確認できる時間は日本標準時である。暦表経度の計算の節で既に述べたとおり、両者の差は地球の自転が次第に遅くなっていることによる。その差をΔT としてあらわし、2009 年はΔT = +66 秒と考えてよい。力学時の時刻 T_D を日本標準時の時刻 T_J に変換するには次の式を使う。

$$T_J = T_D - \Delta T + 9\mathrm{h}$$

最後の+9h は、日本標準時が世界時（正確には協定世界時）に対して 9 時間進んでいることをあらわしている。

計算例：山口大学理学部玄関前で日食が始まる時刻＝力学時で 0 時 40 分 43 秒の時刻を、日本標準時で表せ。ただしΔT = +66 秒とせよ。

答：0 時 40 分 43 秒 － 66 秒 ＋ 9 時 ＝ 9 時 39 分 37 秒

こうして、日食の開始時刻が 9 時 39 分 37 秒と得られた。

５－３．その他の時刻の計算

５－３－１．食が終わる時刻

食が終わる時刻の計算は食の始まりの計算とほぼ同じであり、ただ Q が正から負へ変化する時刻を調べればよい。表計算ソフトを使う方法でも階差表を使う方法でも、やり方は同じである。以下に表計算ソフトを使う方法と階差表を使う方法の計算例を示す。

エクセルを用いた計算例：山口大学理学部玄関前の日食経過の計算（表２）より、Q_1が正から負に変化して部分日食が終了するする時刻は 3 時 20 分のすぐ後である。T_0 = 3 時 20 分 0 秒として、その前後４つの時刻の計算結果を抜粋したものが表７である。横軸 n に対して Q_1 をエクセルで描画し、３次関数を当てはめた結果が図１４であり、これから、Q_1 = 0 となるのは n = 0.012 と読み取った。0.012×600=7 秒であり、T_e =T_0 + 7 秒 = 3 時 20 分 7 秒が求める時刻、すなわち部分日食が終わる時刻である。これを式で表すと次の通り。

$$
\begin{aligned}
T_s &= T_0 + n(T_1 - T_0) \\
&= 3\text{時}20\text{分} + 0.012(30-20) \\
&= 3\text{時}20.12\text{分} \\
&= 3\text{時}20\text{分}7\text{秒}
\end{aligned}
$$

これは力学時の時刻なので、５－２の記述に従って日本標準時へ変換する作業が必要である。

表７．日食が終わる時刻の計算

力学時			n	Q_1
3	10	0	-1	0.063125
3	20	0	0	0.000823
3	30	0	1	-0.069939
3	40	0	2	-0.149327

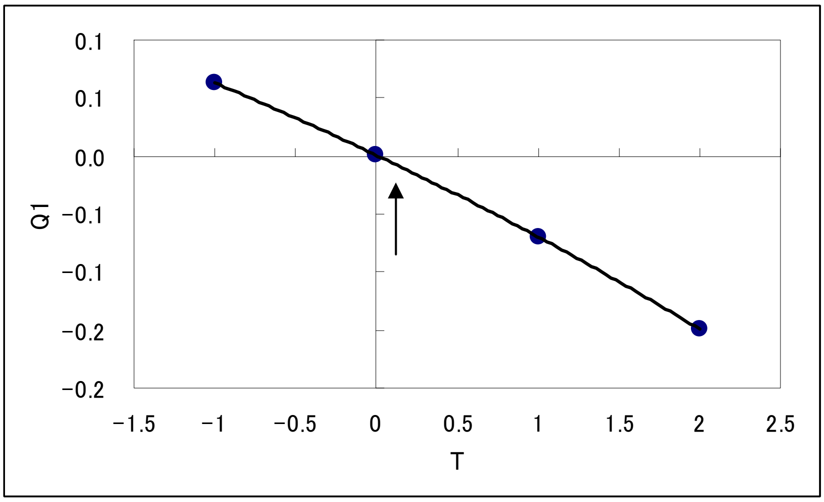


図１４．日食が終了する時刻。

Q_1 = 0 となるのは n = 0.012 と読み取った。正確に読み取るにはグラフを拡大しなければならない。

階差表を用いた計算例：日食の開始時刻の計算と基本は同じであるが、以下ではＱを４個だけ使い、階数を減らした簡易な方法を説明する。

表８．日食が終わる時刻前後の値の階差表（２差まで使う簡易な方法）

時刻	n	Q_1	１差	２差
3 10 0	−1	0.063125		
			−0.062302	
3 20 0	0	0.000823		−0.008460
			−0.070762	
3 30 0	1	−0.069939		−0.008626
			−0.079388	
3 40 0	2	−0.149327		

ステップ１

$Q_0 = 0.000823$、$\delta'_{1/2} = \text{-}0.070762$

$$\begin{aligned} M &= \delta''_0 + \delta''_1 \\ &= \text{-}0.008460 + (\text{-}0.008626) \\ &= \text{-}0.017086 \end{aligned}$$

$$n = -\frac{Q_0}{\delta'_{1/2}} = 0.0116$$

ステップ２

$$B'' = \frac{n(n-1)}{4} = \text{-}0.0029$$

ステップ３

$$n = -\frac{1}{\delta'_{1/2}}\left[Q_0 + B''M\right] = 0.0123$$

ステップ４　ステップ２、３を繰り返す。

表９．ｎの計算結果

計算回数	ｎの値
1	0.0116
2	0.0123
3	0.0124
4	0.0124

ステップ５

$$\begin{aligned} T &= T_0 + n(T_1 - T_0) \\ &= 3\text{時}20\text{分} + 0.0124(30-20) \\ &= 3\text{時}20.124\text{分} \\ &= 3\text{時}20\text{分}7\text{秒} \end{aligned}$$

５－３－２．食が最大になる時刻

太陽がもっとも深く欠けた状態、すなわち食が最大となることを食甚（しょくじん）という。食甚の時刻はＱが最大となる時刻である。これまでの計算と同様にエクセルでグラフを描いて拡大すれば、食甚の時刻は容易に計算できる。表２から抜粋した表１０の Q_1 の変化をみると、２時０分前後で食甚となることがわかる。

表１０．食が最大になる時刻

力学時			n	Q_1
1	50	0	−1	0.266352
2	0	0	0	0.269628
2	10	0	1	0.264595

ここでは、少し違った計算方法を示す。食甚付近の３つの時刻の Q の値を使って、Q の変化を表す２次関数 $Q(n) = an^2 + bn + c$ を作る。a，b，c の値を得るには、次のように連立方程式を解く。

$$\begin{cases} Q(-1) = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = & a - b + c = 0.266352 \\ Q(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = & c = 0.269628 \\ Q(1) = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = & a + b + c = 0.264595 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{aligned} &c = 0.269628 \\ &b = -0.0008785 \\ &a = -0.0041545 \\ &\therefore Q(n) = -0.0041545n^2 - 0.0008785n + 0.269628 \end{aligned}$$

これは上に凸の関数であり、食甚で最大となる。Q が最大となる n は、n による Q の微分が０（$dQ(n)/dn = 0$）となる時刻なので、

$$\frac{Q(n)}{dn} = 2an + b = 0$$

$$\therefore n = -\frac{b}{2a}$$

によって $dQ(n)/dn = 0$ となる時刻 n が得られる。
上の値を代入すると

$$n = -\frac{b}{2a} = -\frac{-0.0008785}{2\times(-0.0041545)} = -0.1057$$

であり、食甚の時刻として 2 時 0 分 0 秒＋(−0. 1057)×600 秒 ＝ 1 時 58 分 57 秒が得られる。これは力学時の時刻なので、**５－２**の記述に従って日本標準時へ変換する作業が必要である。

この方法は食甚前後の３個のデータしか使っていないのでやや精度が低く、計算誤差が数秒あると考えられる。高精度化するためには、データ点数を増やし、当てはめ曲線を３次関数にして計算を行えばよい。

５－４．本影食

皆既日食、すなわち本影による食の計算も手順はほぼ同じである。山口では皆既日食にならないので、鹿児島県十島村悪石島の役場を観測地点とした計算を行う。使ったデータは次の通り。

表１１．悪石島の観測点位置

経度	129 °	36 ’	15 ”	129.60417 °
緯度	29 °	27 ’	3 ”	29.45083 °
標高	170 m			

悪石島観測地点における日食判定値の変化を図１５に示す。世界時２時頃に Q_2 が 0 をわずかに上回っているので、皆既日食が起きることがわかる。2 時の前後の 1 時間の Q_2 を拡大して示したものが図１６である。1 時 50 分から 2 時 20 分までの 4 つの計算値を用いて、3 次関数の当てはめを行った結果が図１７である。

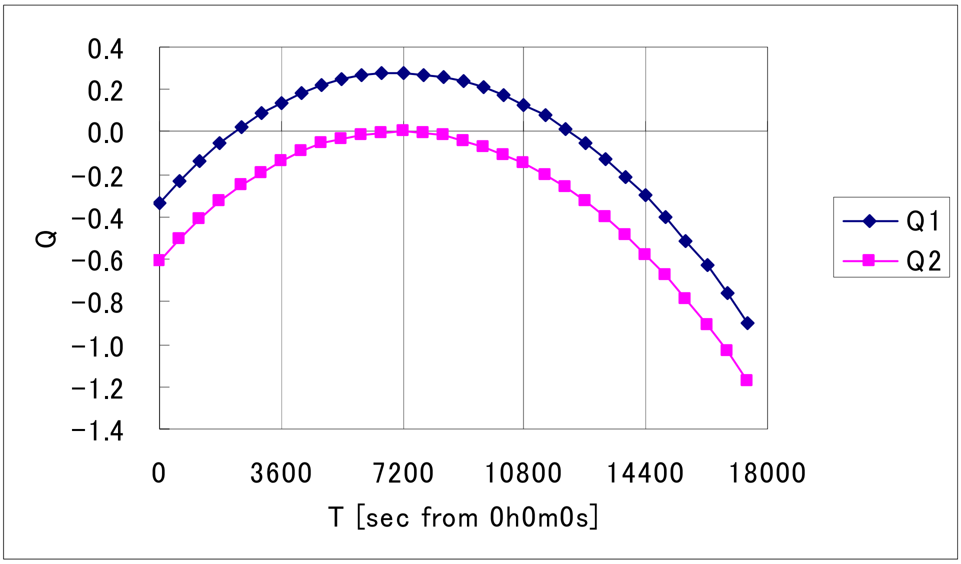


図１５．悪石島観測地点における日食判定値の変化

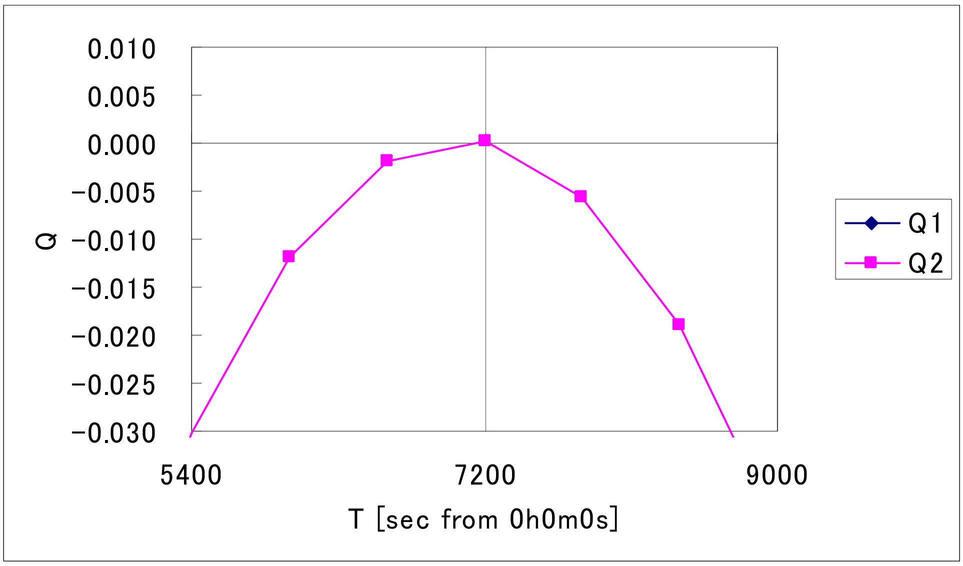


図１６．２時頃の Q_2 の変化の拡大図

表１２．Q_2の当てはめに用いたデータ

n	Q_2
-1	-0.0018777
0	0.00017834
1	-0.0055884
2	-0.0190604

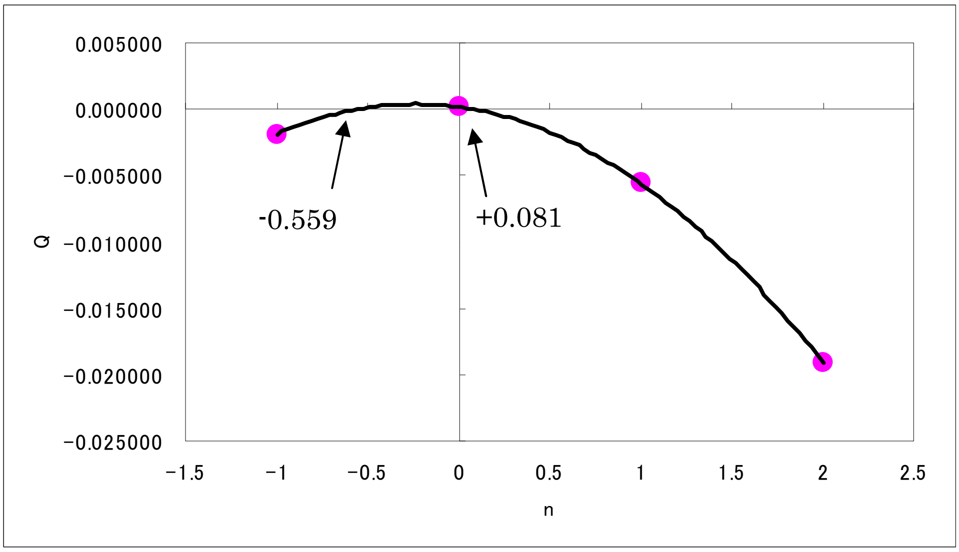


図１７．Q_2に対する３次関数の当てはめ

当てはめた関数が０となる n を読み取ると、$n = -0.559$ で食が始まり、$n = +0.081$ で終了する。これから日食開始と終了の時刻は表１３に示した値となる。

表１３．悪石島観測地点の皆既日食の時刻

	力学時	日本標準時
皆既日食開始時刻　Ts	1 時 54 分 25 秒	10 時 53 分 19 秒
皆既日食終了時刻　Te	2 時　0 分 49 秒	10 時 59 分 43 秒

皆既日食の継続時間は 6 分 24 秒である。海上保安庁の天体位置表では皆既日食の継続時間は 6 分 25 秒とされており、この計算結果と１秒の差で一致している。

なお、図１７から推測されるように、10 分毎の Q_2 の計算値が常に負であっても、その間の時刻で Q_2 が正になる可能性もある。したがって皆既日食が起きるかどうかの判定は慎重に行うことが必要である。

（６）食の状態の計算

６－１．食の方向（１）北極方向角

日食が始まる瞬間にどの方向から欠け始めるのか、興味がある問題である。また日食中に太陽がどのような形に見えるのかを知るためには、欠けている方向と欠ける程度（食分）がわかればよい。欠けている方向は、観測者から見た太陽の中心に対する月の中心の位置角である。この角度を天の北極の方向から東回りに測り、北極方向角 P という（図１８）。計算には観測者基準面上の月影と観測者の位置関係を使う（図１９）。

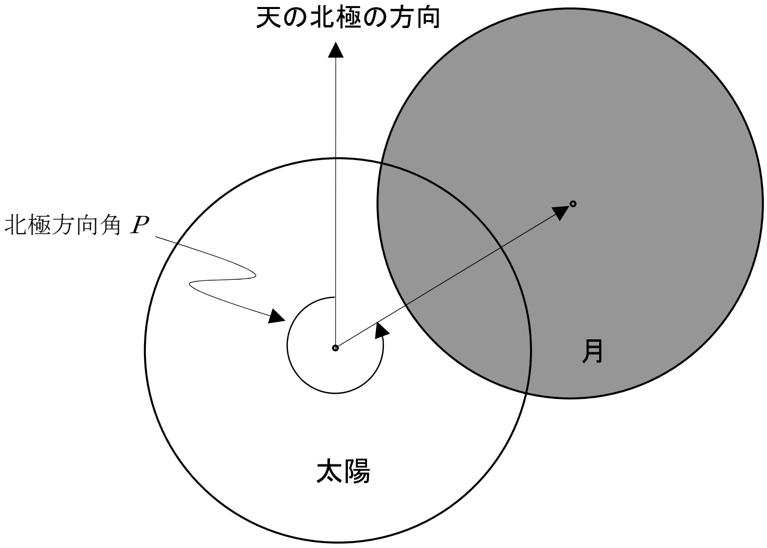


図１８．太陽・月の位置関係と北極方向角 P

これは観測者から見た太陽と月の図である。

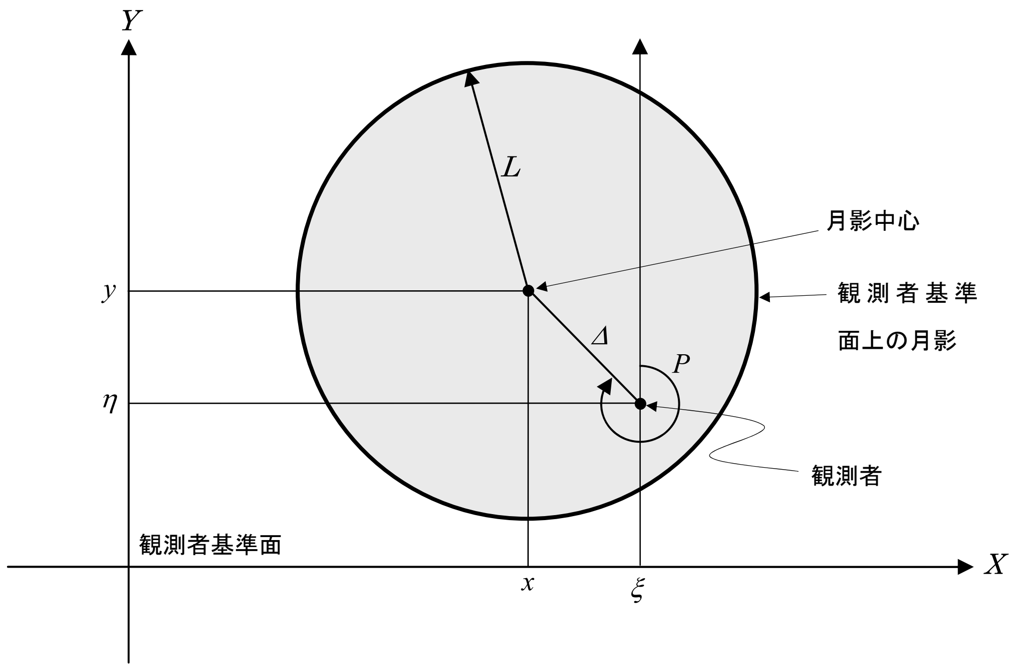


図１９．観測者基準面上の観測者と月影の位置関係

これは太陽・月から地球上の観測者を見た図である。Pを測る方向が図１８と逆になっていることに注意。

北極方向角の計算には、観測者基準面における観測者と月影の位置関係を使う。図１９に示す通り、P、Δ、x、y、ξ、ηは次の関係となっている。

$$\Delta\sin(360-P)=-\Delta\sin P=\xi-x$$
$$\Delta\cos(360-P)=\Delta\cos P=y-\eta$$

整理すると

$$\Delta\sin P=x-\xi$$
$$\Delta\cos P=y-\eta$$

となる。これで左辺と右辺を割り算すると

$$\tan P=\frac{x-\xi}{y-\eta}$$

である。したがって

$$P=\tan^{-1}\left(\frac{x-\xi}{y-\eta}\right)$$

としてPが得られる。ただし電卓やコンピュータで計算するときには、$\tan^{-1}$の与える結果に注意が必要である。電卓などで計算される $\tan^{-1}$の値は通常 -90 ～ +90° の範囲なので、P を 0～360° の範囲として計算するために次の手順で補正をする。

- $y-\eta<0$の場合は、計算で求めたPに 180° を足す
- $y-\eta>0$かつ$x-\xi<0$の場合は、計算で求めたPに 360° を足す

計算例：力学時１時０分０秒における山口大学理学部玄関前の観測地点における月の北極方向角 Pを計算する。

ベッセル日食要素表より

x = −0.872843

y = 0.350983

Q の計算途中で求めた観測者の位置より

ξ= −0.480161

η= 0.289540

これらを用いて

x - ξ= −0.392682

y - η= 0.061443

これから

$$P=\tan^{-1}\left(\frac{-0.392682}{0.061443}\right)=-81.1070^\circ$$

ただし「$y-\eta>0$かつ$x-\xi<0$の場合は、計算で求めた P に 360° を足す」という条件に一致するので

−81.1070 + 360 = 278.8930°

P にはこれほど細かい数値は必要ないので、小数点以下は四捨五入する。したがって

P = 279°

である。

６－２．太陽と月の見かけの大きさと距離

太陽の欠け具合は、観測者から見た太陽の半径θ_sと月の半径θ_m、そして太陽と月の中心距離θ_dによってあらされる（図２０）。この３つの値は観測者から見た角度であるが、以下では長さと同じように扱う。

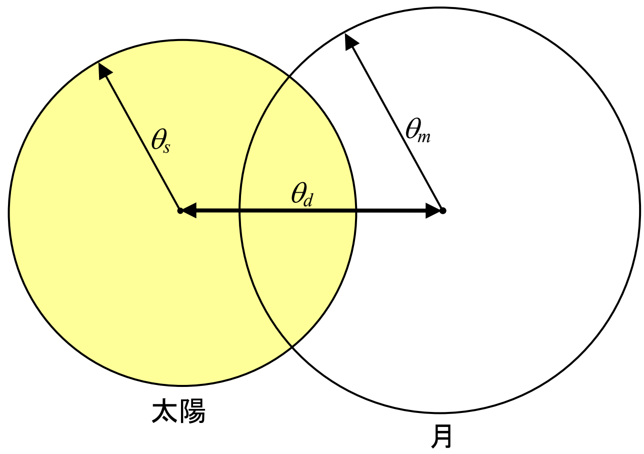


図２０．太陽の欠け具合

これらの値（θ_s、θ_m、θ_d）は、観測者基準面上の半影・本影の半径（L_1, L_2）と月影距離（Δ）によって計算できる[11]。図２１において観測者がO_1の位置にいるなら部分日食の開始（または終了）であるから、観測者から見た太陽と月は外側で接した状態であり（図２２）、太陽と月の中心距離θ_{d1}は月半径θ_mと太陽半径θ_sの和に等しい。すなわち

$$\theta_{d1} = \theta_m + \theta_s$$

である。このときFO_1は半影半径L_1である。これをθ_{d1}に対応する長さとする。次に観測者がO_2の位置にいるなら皆既日食の開始（または終了）であるから、観測者から見た太陽と月は内側で接した状態であり

$$\theta_{d2} = \theta_m - \theta_s$$

であり、対応する長さFO_2は本影半径$-L_2$である[12]。観測者が月影中心の位置 F にいる場合は$\theta_d = 0$であり、対応する長さも 0 である。観測者が任意の O の位置にいる場合、太陽と月の中心距離θ_dは未知だが、対応する長さFOは月影距離Δなので既知である。

各々の角度θ_dと対応する長さは比例していると考えられるので、α を比例定数として

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha d_1 = \alpha(\theta_m + \theta_s) \\ -L_2 &= \alpha d_2 = \alpha(\theta_m - \theta_s) \\ \Delta &= \alpha\theta_d \end{aligned}$$

と書ける。この連立方程式からα を消去し、（θ_m、θ_d）を（θ_s、L_1、 L_2、Δ ）によって表すと次のようになる。

$$\theta_m = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}\theta_s$$

$$\theta_d = \frac{2\Delta}{L_1 + L_2}\theta_s$$

これで太陽と月の位置関係を、太陽の半径θ_sを基準にして表すことができた。

---

[11] 角度と長さを比例計算するので厳密ではないが、角度はみな微小（１度以下）なので、ここでの目的には十分正確である。
[12] L_2に負号がついている理由は１－２のベッセル日食要素の説明で述べたとおり。

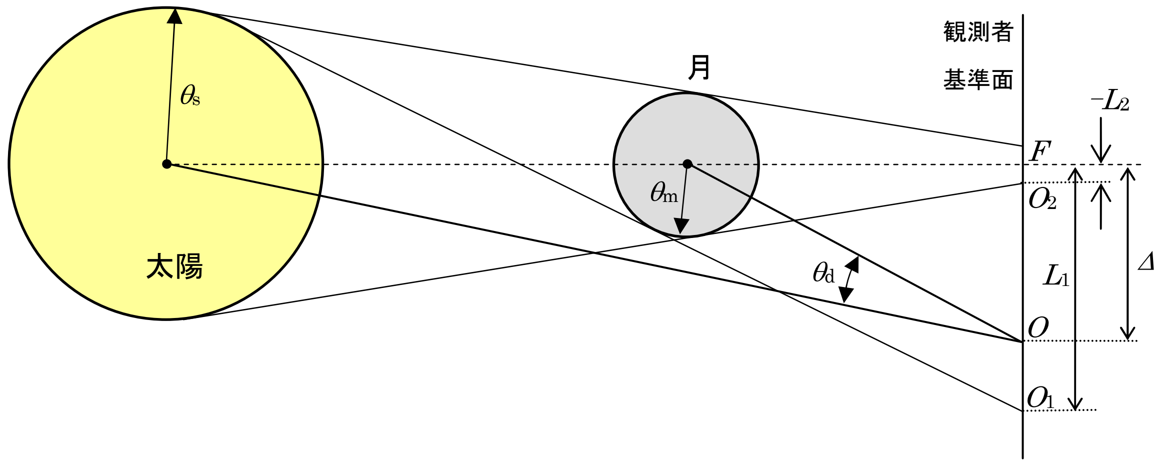


図２１．太陽と月の見かけの大きさと位置関係

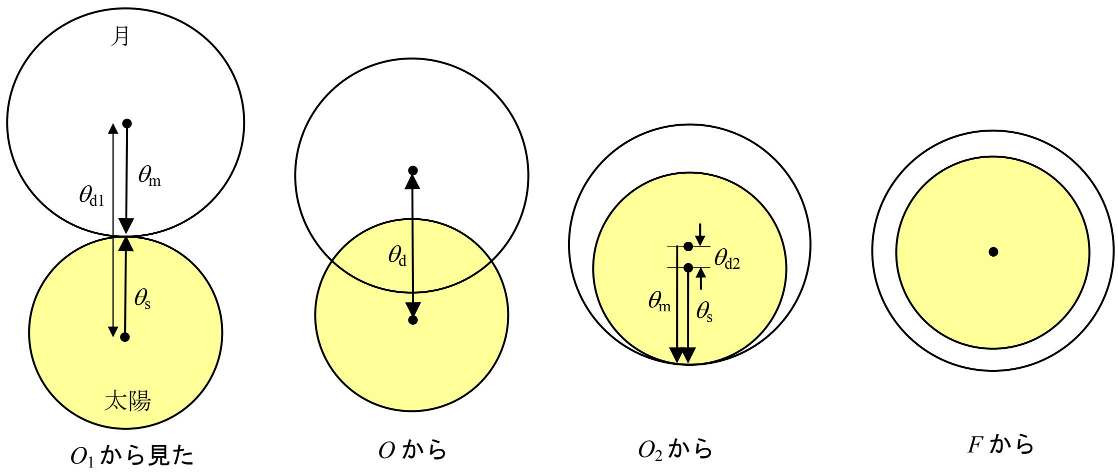


図１９．観測者から見た太陽と月の位置関係

６－３．食分（１）

太陽が欠けた深さを数値として表すのに食分（しょくぶん）D が用いられる。食分とは観測者から見た太陽（図２２）において、欠けた部分 $(\theta_m+\theta_s)-\theta_d$ と太陽の直径 $2\theta_s$ の比である。上で得た式を使って変形すると

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{(\theta_m+\theta_s)-\theta_d}{2\theta_s} \\
&= \frac{\left(\dfrac{L_1-L_2}{L_1+L_2}\theta_s+\theta_s\right)-\dfrac{2\Delta}{L_1+L_2}\theta_s}{2\theta_s} \\
&= \frac{L_1-\Delta}{L_1+L_2}
\end{aligned}
$$

である。部分日食では $0<D<1$、皆既日食の時には $D>1$ となる。

計算例：力学時１時０分０秒における山口大学理学部玄関前の観測地点における月の半径θ_m、月・太陽距離θ_d、食分Dを計算する。

Qの計算途中で求めた観測者基準面における影の半径より

L_1 = 0.526579

L_2 = -0.0197082

Δ^2 = 0.157974

これから、

$L_1 - L_2$ = 0.546287

$L_1 + L_2$ = 0.506871

$L_1 - \Delta$ = 0.129119

これらを用いて

$\theta_m = 1.078\theta_s$

$\theta_d = 1.568\theta_s$

$D = 0.255$

である。

６－４．日食の経過の図示

この結果を図に描く。まず適当な大きさ、例えば半径３ cm の円として太陽を描く。これは θ_s = 3 cm とするという意味であり、よって月の半径と月・太陽距離は

$\theta_m = 1.078\theta_s = 3.2$ cm

$\theta_d = 1.568\theta_s = 4.7$ cm

となる。一方、すでに計算したようにこの時刻における月の北極方向角は

$P = 279°$

である。したがって、太陽の中心の上方向から左回りに測って 279° の方向で、太陽の中心から 4.7 cm 離れた位置に、半径 3.2 cm の円を描けば、これが月となる。こうして日食の様子を図に描くことができる。

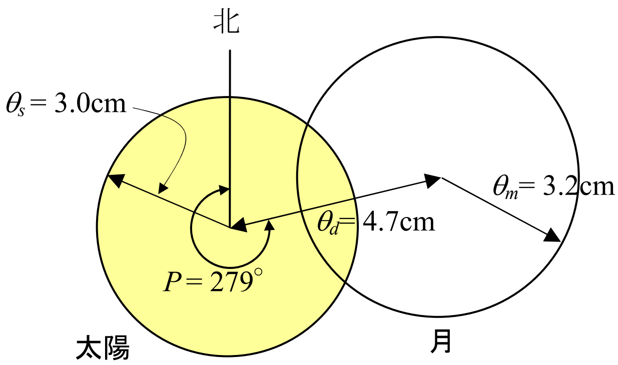


図２３．日食の状況の図

日食経過中の各時刻について北極方向角、月の半径、月・太陽の中心距離、食分の計算を行った結果を表１４に示した。月・太陽距離が2時頃に最小となり、食分がもっとも大きくなる。この頃が食甚であることがわかる。また北極方向角は食甚のころに急激に変化することがわかる。これは太陽と月の中心位置が接近するため、方向角がすばやく変化することを表している。

表１４の値を使って、毎時0分における日食の様子を図示したものが図２４である。太陽より少し（約8%）大きい月が左上側から右下側へと移動し2時頃に最も食分が大きくなるなど、日食経過の様子がわかる（ただしこれは力学時の時刻なので、日本標準時での時刻として表すには５－２の記述に従って計算する作業が必要である）。

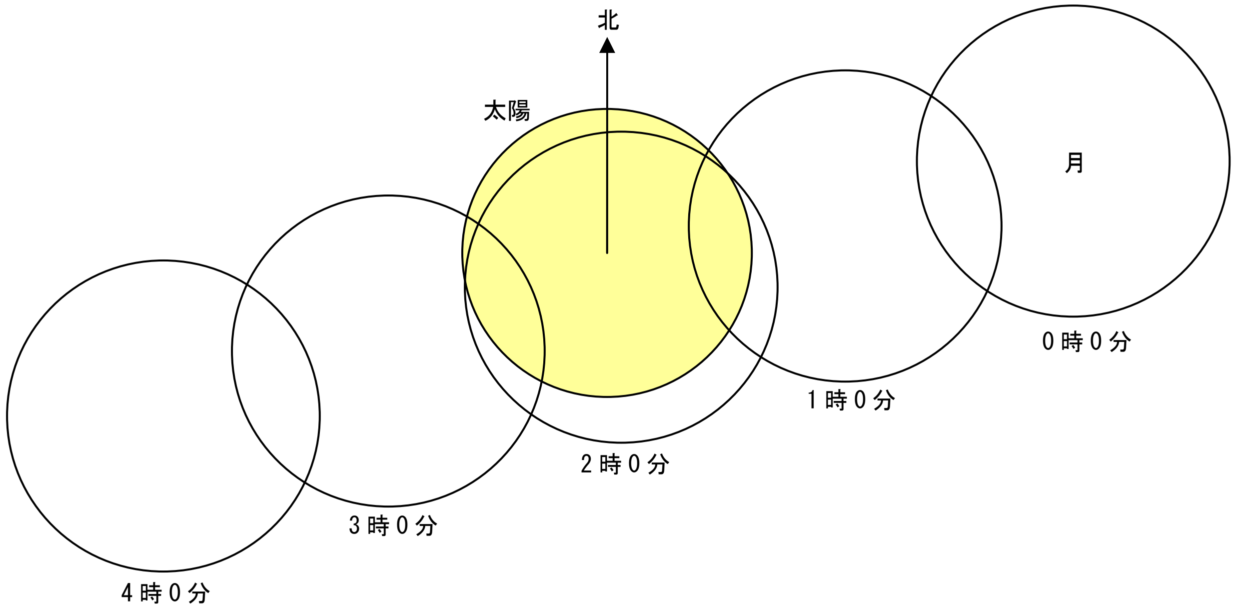


図２４．日食の経過

表１４．日食の経過の計算

力学時			影と観測者の距離		北極方向角				月半径	月・太陽距離	食分
h	m	s	x−ξ	y−η	P	L_1-L_2	L_1+L_2	$L_1-\Delta$	θ_m*	θ_d*	D
0	0	0	-0.790798	0.187211	283.3	0.546289	0.507998	-0.285512	1.075	3.199	-0.562
0	10	0	-0.721684	0.167247	283.0	0.546290	0.507789	-0.213770	1.076	2.918	-0.421
0	20	0	-0.653739	0.146906	282.7	0.546288	0.507588	-0.143103	1.076	2.640	-0.282
0	30	0	-0.586917	0.126172	282.1	0.546289	0.507396	-0.073483	1.077	2.366	-0.145
0	40	0	-0.521167	0.105027	281.4	0.546288	0.507211	-0.004895	1.077	2.096	-0.010
0	50	0	-0.456440	0.083456	280.4	0.546288	0.507037	0.062655	1.077	1.830	0.124
1	0	0	-0.392682	0.061443	278.9	0.546287	0.506871	0.129119	1.078	1.568	0.255
1	10	0	-0.329838	0.038977	276.7	0.546287	0.506714	0.194367	1.078	1.311	0.384
1	20	0	-0.267852	0.016042	273.4	0.546286	0.506567	0.258094	1.078	1.059	0.509
1	30	0	-0.206665	-0.007374	268.0	0.546286	0.506431	0.319562	1.079	0.817	0.631
1	40	0	-0.146218	-0.031282	257.9	0.546285	0.506305	0.376769	1.079	0.591	0.744
1	50	0	-0.086449	-0.055691	237.2	0.546285	0.506192	0.423405	1.079	0.406	0.836
2	0	0	-0.027295	-0.080613	198.7	0.546285	0.506087	0.441077	1.079	0.336	0.872
2	10	0	0.031307	-0.106055	163.6	0.546285	0.505995	0.415560	1.080	0.437	0.821
2	20	0	0.089422	-0.132027	145.9	0.546284	0.505914	0.366639	1.080	0.630	0.725
2	30	0	0.147115	-0.158533	137.1	0.546284	0.505845	0.309788	1.080	0.855	0.612
2	40	0	0.204453	-0.185579	132.2	0.546284	0.505789	0.249919	1.080	1.092	0.494
2	50	0	0.261504	-0.213171	129.2	0.546284	0.505743	0.188632	1.080	1.334	0.373
3	0	0	0.318334	-0.241312	127.2	0.546284	0.505709	0.126536	1.080	1.580	0.250
3	10	0	0.375012	-0.270004	125.8	0.546284	0.505688	0.063886	1.080	1.828	0.126
3	20	0	0.431606	-0.299249	124.7	0.546284	0.505679	0.000783	1.080	2.077	0.002
3	30	0	0.488185	-0.329048	124.0	0.546284	0.505682	-0.062742	1.080	2.328	-0.124
3	40	0	0.544816	-0.359400	123.4	0.546284	0.505698	-0.126691	1.080	2.581	-0.251
3	50	0	0.601571	-0.390303	123.0	0.546284	0.505726	-0.191089	1.080	2.836	-0.378
4	0	0	0.658515	-0.421755	122.6	0.546284	0.505765	-0.255972	1.080	3.092	-0.506
4	10	0	0.715716	-0.453752	122.4	0.546284	0.505815	-0.321382	1.080	3.351	-0.635
4	20	0	0.773243	-0.486290	122.2	0.546284	0.505879	-0.387364	1.080	3.611	-0.766
4	30	0	0.831162	-0.519362	122.0	0.546284	0.505954	-0.453966	1.080	3.874	-0.897
4	40	0	0.889539	-0.552963	121.9	0.546285	0.506040	-0.521238	1.080	4.140	-1.030
4	50	0	0.948437	-0.587083	121.8	0.546285	0.506139	-0.589225	1.079	4.408	-1.164

(*) 太陽半径を $\theta_m = 1$ として表している。

６－５．食の方向（２）天頂方向角

北極方向角Ｐは太陽に対する月の運動を表すのに適しているが、観察をする場合は北極の方向を基準とするよりも、天頂からの角度で表したほうがわかりやすいことがある。この天頂方向角Ｖは、太陽の中心に対する月の中心の方向を、天頂から左回りに測った角度として定義されている（図２５、２６）。天頂方向角Ｖは次の式で計算できる。

まず q（極頂対角という）を次の式で計算する[13]。

$$\tan q = \frac{\xi}{\eta}$$

これから

$$q = \tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)$$

P と同様に q を 0～360° の範囲として計算するために次の手順で補正をする。

- $\eta < 0$ の場合は、計算で求めた q に 180° を足す
- $\eta > 0$ かつ $\xi < 0$ の場合は、計算で求めた q に 360° を足す

この q を北極方向角 P から引くと、天頂方向角 V が得られる。

$$V = P - q$$

計算例：力学時１時０分０秒における山口大学理学部玄関前の観測地点における月の天頂方向角 *V* を計算する。

$\xi = -0.480161$
$\eta = 0.289540$

よって q は

$$q = \tan^{-1}\left(\frac{-0.480161}{0.289540}\right) = -59^\circ$$

である。ただし「$\eta > 0$ かつ $\xi < 0$ の場合は、計算で求めた q に 360° を足す**」という条件に一致するので、**

$q = 301^\circ$

***P* = 279° なので**

***V* = 279 - 301 = -22° = 338°**

である。

極頂対角 q は、図２５において天の北極の方向から天頂の方向を左回りに測った値である。一方、図に示した $q' = 360^\circ - q$ も天頂の方向と天の北極の関係を表すのに使うことができる。

---

[13] この式の導出は省略する。

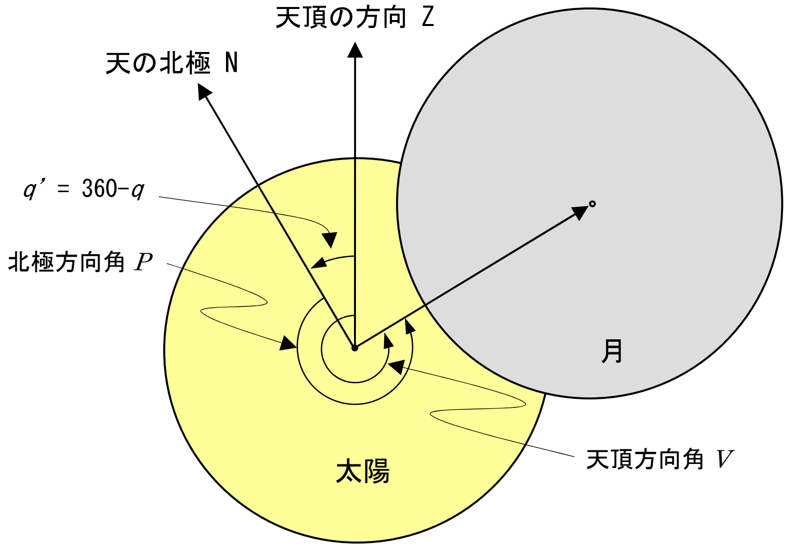


図２５．観測者から見た太陽と月の位置関係、天頂方向角と北極方向角

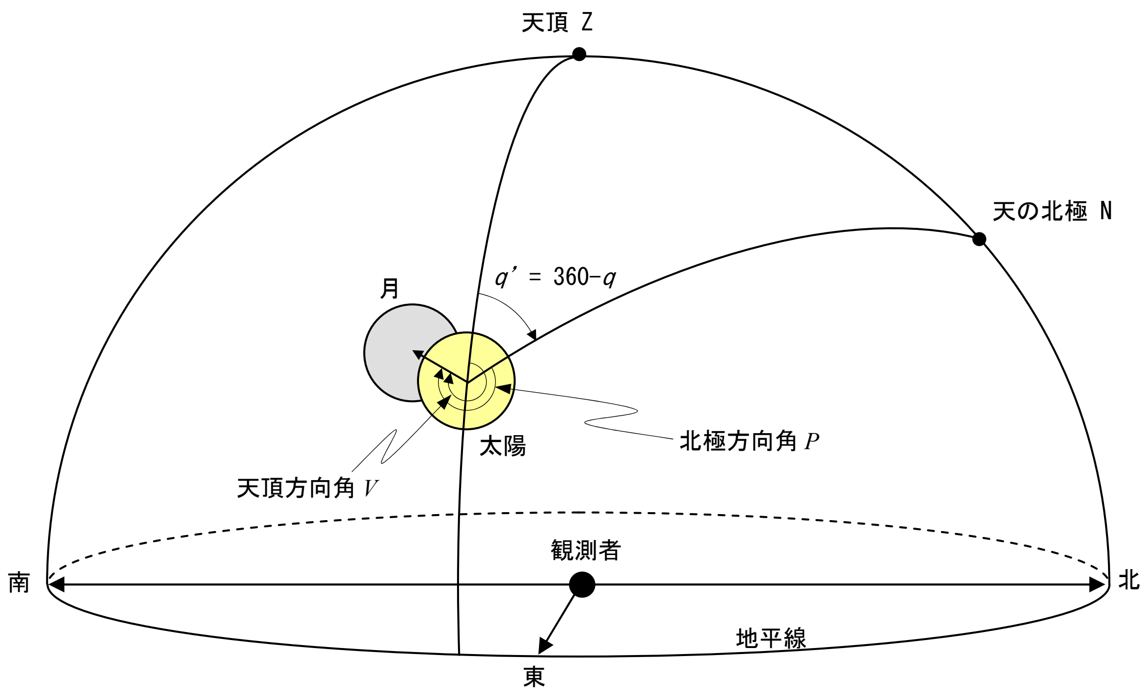


図２６．天球の外から見た太陽と月の位置関係、天頂方向角と北極方向角

６－６．金環日食の場合

金環日食では太陽は完全に月に隠されない。金環日食では食分を月の直径 $2\theta_m$ と太陽の直径 $2\theta_s$ の比と約束する。すなわち

$$\begin{aligned} D &= \frac{2\theta_m}{2\theta_s} \\ &= \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} \end{aligned}$$

である。これはほとんど変化しないので、金環日食の最中は食分が一定である。また金環日食では $D < 1$ である。

６－７．食分（２）欠ける面積比

太陽面に対する月の影の面積比を知りたくなることがある。例えば日食によって太陽光の強さがどれだけ減少するのかという事を考える場合、食分ではなく面積比を使うことが必要である[14]。

まず後の計算のために図２７に示された２つの角度 α_s と α_m を計算する。これまでの計算で得られている値は、θ_s、θ_m、θ_d の３つである。これらの値に平面三角形の余弦法則を適用すると

$$\theta_m^2 = \theta_s^2 + \theta_d^2 - 2\theta_s\theta_d\cos\alpha_s$$

$$\therefore \cos\alpha_s = \frac{\theta_s^2 + \theta_d^2 - \theta_m^2}{2\theta_s\theta_d} \qquad \therefore \alpha_s = \cos^{-1}\left(\frac{\theta_s^2 + \theta_d^2 - \theta_m^2}{2\theta_s\theta_d}\right)$$

同様にして

$$\cos\alpha_m = \frac{\theta_m^2 + \theta_d^2 - \theta_s^2}{2\theta_m\theta_d} \qquad \therefore \alpha_m = \cos^{-1}\left(\frac{\theta_m^2 + \theta_d^2 - \theta_s^2}{2\theta_m\theta_d}\right)$$

である。図から明らかなように $0 \le \alpha_s, \alpha_m \le 180^\circ$ である。通常の電卓やパソコンで $\cos^{-1}$ を計算すると、0 から 180° の間の値を返してくる。したがってここで計算した角度 α_s と α_m に補正は必要ない。一方、この後の計算のため、角度 α_s と α_m はラジアンで表しておくことが必要である。

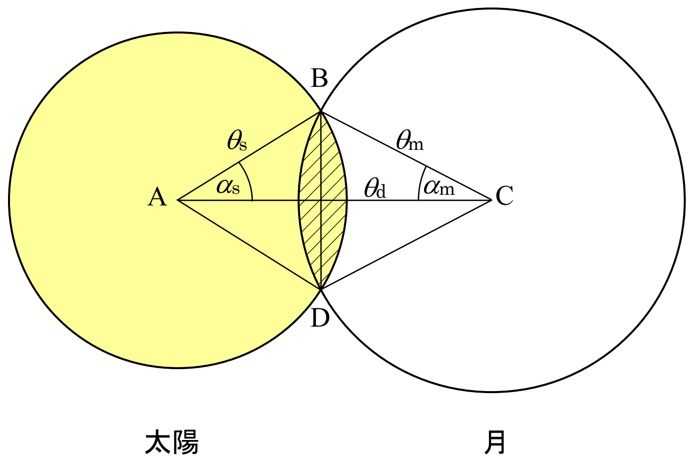


図２７．欠けた部分の面積

14 ただし太陽表面の明るさは一様ではなく、周辺ほど暗い。太陽の光量がどれほど減るのか考えるためには、厳密に言えばこの効果（周縁減光という）を考慮しなければならないが、ここでは単純に太陽の明るさは表面上で一様であると仮定する。

欠けた部分とは２つの扇形（ABD と CBD）の重なった部分、図の斜線部である。欠けた部分の面積は、扇形 ABD と扇形 CBD の面積の和から四角 ABCD の面積を引くことで得られる。

半径 r 、頂角 α の扇形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

である。ただし α はラジアンで表される値である。図の２つの扇形の面積はそれぞれ

扇形 ABD　$S_s = \frac{1}{2} \theta_s^2 2\alpha_s = \theta_s^2 \alpha_s$

扇形 CBD　$S_m = \frac{1}{2} \theta_m^2 2\alpha_m = \theta_m^2 \alpha_{mm}$

である。

次に、四角形 ABCD の面積 S_T は AC×BD÷２である。辺 AC の長さは θ_d、辺 BD の長さは $2\theta_s \sin\alpha_s$ なので、

四角形 ABCD　$S_T = \frac{1}{2} \theta_d \cdot 2\theta_s \sin\alpha_s = \theta_d \theta_s \sin\alpha_s$

となる。

これらの結果から、欠けた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \{S_s + S_m\} - S_T \\ &= \{\theta_s^2 \alpha_s + \theta_m^2 \alpha_m\} - \theta_d \theta_s \sin\alpha_s \end{aligned}$$

である。太陽全体の面積は $\pi\theta_s^2$ なので、太陽全体の面積に対する欠けた部分の面積の比 R （または光っている部分の比 $1-R$ ）は

$$R = \frac{S}{\pi\theta_s^2} = \frac{\theta_s^2 \alpha_s + \theta_m^2 \alpha_m - \theta_d \theta_s \sin\alpha_s}{\pi\theta_s^2}$$

によって得られる。

計算例：力学時１時における欠けた面積の割合を計算せよ。

表１４の計算結果から

$\theta_s = 1$
$\theta_m = 1.078$
$\theta_d = 1.568$

である。これから

$\alpha_s = 0.749$　　$\sin\alpha_s = 0.681$
$\alpha_m = 0.684$

であり、よって

$R = 0.151$　　$1 - R = 0.849$

である。すなわち太陽の光量は約 85%に減少している。６－３で計算した食分は D= 0.255 であり、R= 0.151 と異なっていることに注意せよ。

（７）日食計算のまとめ

これまで説明した日食計算の方法を、結果だけまとめて以下に示す。

- **暦表経度の計算（２－３）**

ＧＰＳや地図で測定した観測地点の経度Λo に次の式で補正を加えて暦表経度を得る。

$$\Lambda = \Lambda_o - \left(1.0027397 \times 15 \times \Delta T\right)''$$
$$= \Lambda_o - \left(15.0410685 \times \Delta T\right)''$$

- **ＳとＣの計算（２－４）**

緯度φ と標高 h（m）を用いて、次の式によって地球が楕円体である補正係数ＳとＣを計算する。

$$S = 0.99497430 - 0.00167078\cos 2\varphi + 0.00000210\cos 4\varphi + 0.0000001568h$$
$$C = 1.00167993 - 0.00168204\cos 2\varphi + 0.00000212\cos 4\varphi + 0.0000001568h$$

- **観測地点の位置、および基準面上の影の位置（３－１、３－２）**

日食の基準座標系における観測者の位置（ξ, η, ζ）、観測者基準面における影の半径 L_1 と L_2、観測者と月影中心線の距離（月影距離）Δ、日食判定値 Q_1 および Q_2 を次の式で計算する。各時刻についてこの計算を行う。

$$\xi = C\cos\varphi\sin(\mu + \Lambda)$$
$$\eta = S\sin\varphi\cos d - C\cos\varphi\sin d\cos(\mu + \Lambda)$$
$$\varsigma = S\sin\varphi\sin d + C\cos\varphi\cos d\cos(\mu + \Lambda)$$

$$L_1 = l_1 - \varsigma\tan f_1$$
$$L_2 = l_2 - \varsigma\tan f_2$$
$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$
$$\Delta = \sqrt{\Delta^2}$$

$$Q_1 = L_1^2 - \Delta^2 \qquad Q_2 = L_2^2 - \Delta^2$$

- **日食の始まりの時刻（５－１）**

Q の値が 0 になる前後の４つの値を取り出し、T_0 と T_1 の間にある $Q = 0$ となる n（$0 < n < 1$）を推定する。推定方法は本文を参照せよ。この n を用いて、日食の開始時刻 Ts は次の式で得られる。

$$T_s = T_0 + n(T_1 - T_0)$$

- **力学時から日本標準時への変換（５－２）**

計算によって得られた力学時の時刻 T_D を、次の式で日本標準時の時刻 T_J に変換する。

$$T_J = T_D - \Delta T + 9\mathrm{h}$$

- **北極方向角（６－１）**

各観測時刻における北極方向角 P は次の式で計算できる。

$$P = \tan^{-1}\left(\frac{x - \xi}{y - \eta}\right)$$

P を 0〜360° の範囲として計算するために次の手順で補正をする。

- $y-\eta<0$ の場合は、計算で求めた P に 180° を足す
- $y-\eta>0$ かつ $x-\xi<0$ の場合は、計算で求めた P に 360° を足す

● **太陽と月の見かけの大きさと距離（６－２）**

観測者から見た月の半径 θ_m と太陽と月の中心距離 θ_d は次の式で計算できる。ただし太陽の半径 θ_s を基準にして表す。

$$\theta_m=\frac{L_1-L_2}{L_1+L_2}\theta_s$$

$$\theta_d=\frac{2\Delta}{L_1+L_2}\theta_s$$

● **食分（６－３）**

太陽が欠けた深さを表す食分 D は次の式で計算できる。

$$D=\frac{L_1-\Delta}{L_1+L_2}$$

● **天頂方向角（６－５）**

天頂方向角 V は次の式で計算できる。まず q（極頂対角）を次の式で計算する。

$$q=\tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)$$

P と同様に q を 0〜360° の範囲として計算するために次の手順で補正をする。

- $\eta<0$ の場合は、計算で求めた q に 180° を足す
- $\eta>0$ かつ $\xi<0$ の場合は、計算で求めた q に 360° を足す

この q を北極方向角 P から引くと、天頂方向角 V が得られる。

$$V=P-q$$

● **欠ける面積比（６－７）**

次の式で角度 α_s と α_m を計算する。ただしラジアンで表す。

$$\alpha_s=\cos^{-1}\left(\frac{\theta_s^2+\theta_d^2-\theta_m^2}{2\theta_s\theta_d}\right)\qquad \alpha_m=\cos^{-1}\left(\frac{\theta_m^2+\theta_d^2-\theta_s^2}{2\theta_m\theta_d}\right)$$

太陽全体の面積に対する欠けた部分の面積の比 R は次の式で得られる。

$$R=\frac{\theta_s^2\alpha_s+\theta_m^2\alpha_m-\theta_d\theta_s\sin\alpha_s}{\pi\theta_s^2}$$

（８）計算の精度と観測との差

上記の計算によって得られる数値、特に日食の開始と終了時刻の正確さおよび観測との差について述べる。

- **日食要素表の正確さ**

この計算の基礎となっているのは表１のベッセル日食要素表である。これは海上保安庁が計算して公表しているものであり、基礎となっているのは月、地球などの太陽系天体の運動の観測と一般相対性理論（重力の理論）である。この数表は、計算による誤差を１秒以下にするという目標に対して十分高精度である。

- **地球回転の揺らぎ（ΔＴ）**

今回の計算ではΔＴ＝66 秒という値を使った。この値は、地球の回転が次第に遅くなっていることを表すパラメータである。地球の自転が揺らぐ、あるいは遅くなる理由はいくつか存在する。次第に自転が遅くなるのは月・太陽による潮汐摩擦で地球の自転にブレーキがかかっているというのが理由である。不規則に揺らぐのは、例えば気候変動に応じて地球上の風の吹き方が変化する、地球上の氷の分布が変化して地球の慣性能率が変化する、地球内部の核の位置が変化する、などの理由が考えられる。これらの効果はまだ全ては解明されていないため、ΔＴの変化は完全には予測できない。過去のΔＴの推移から、2009 年は 66 秒として計算すれば１秒以下の誤差しか生じないだろうと考えられ、それは十分信頼できる。しかし 0.1 秒程度の誤差は生じうる。

- **観測地点の誤差**

地表に投影した月の影は、１秒間におよそ１ km の速さで西から東へと移動する[15]。したがって、観測地点の位置を１ km 間違えると、日食の時刻に１秒の誤差を生じる。逆に、１ km もの誤差を含まないように観測地点の位置を測定すれば、推定値の誤差１秒以下という目標の精度を達成できる。標高も同様であり、１ km 以上も標高の値を誤らない限り、時刻の推定値に生じる誤差は１秒以下である。

もちろん、実験や観察は高精度に行うことが重要である。正確に測れるものは十分正確に測っておくことが望ましい。

- **月面の凸凹**

上記の計算は月が完全な球であると仮定している。実際の月面は巨大なクレーター、山脈、谷など複雑な地形をしているため、誤差の原因となる。月探査機「かぐや」の詳細な観測結果によれば、月面の最も高いところと低いところでは、約 20 km の標高差があるとされる。月面全体の平均的な凸凹は２～３km 程度であろう。ベッセル日食要素表では、月面の凸凹を平均した球として月の大きさが仮定されている。

上記の通り、月の影が地表を通過する時間は１秒間に１ km 程度なので、２～３km の凸凹があると、月を球と仮定した日食の開始・終了の時刻に対して２～３秒の差となる。

2007 年 2 月 17 日に起きた日食を太陽観測衛星「ひので」が観測した。このとき高精細な観測によって、太陽の欠けた部分の縁の形（月の形）が凸凹していることがはっきりと確認されている。

月縁の凸凹は部分日食の観測では２～３秒の誤差を生じるだけであるが、皆既日食の場合には注意が必要である。皆既日食を観察する人にとって、皆既の継続時間や始まり・終りの時刻は大変重要である。月縁に深い谷があるとそこから光が漏れて皆既日食にならないため、皆既日食の継続時間は上記の計算結果より数秒短くなることがある。このような事態にならないよう月の大きさを少し小さい値で計算するなどの工夫をする場合もある。

---

15 この速度は月の影と観測地点の位置関係により半分になったり倍になったりするので、これはめやすの値。

厳密には太陽の大きさも考慮しなくてはならない。

皆既日食に注目した予報の精度について、石井馨氏よる詳しい解説が「星ナビ」２００８年１０月号２２ページに掲載されていて、一読の価値がある。詳細は、ＮＡＳＡの日食サイト（NASA Eclipse Web Site）に説明がある。

- **計算の手順**

計算を上記の記述の通りに行えば、計算によって発生する誤差は１秒以下である。

- **大気の屈折**

上記の計算は大気の屈折を考慮していない。しかし地平線に近い日食で無い限り１秒以下の時間誤差しか生じない。今回の日食は十分高い角度で観測されるので、大気の屈折による誤差は無視できる。

以上は、日食の開始・終了時刻の計算値が含むであろう誤差に関する説明である。月面の凸凹が２～３秒の誤差を生じうるが、その他の効果はほとんど無視できる。

ただし注意すべきことは、この計算結果が「正解」ではないということである。自然の観測や理論的予想において正解というものは無い。計算値にも様々な誤差要因が含まれているのであり、我々は決して真の値を計算だけで得ることはできない。

もちろん、観測にも誤差がある。

- **観測誤差（個人誤差）**

日食が始まった瞬間を正確に捉えるのは難しい。終了の時刻は測定しやすいが、それでも容易に 10 秒程度の誤差を生じうる。

- **時刻誤差**

観測を行うときには、必ず時計を基準にする。その時計の正確さには注意が必要である。手作業で時計を時報にあわせた場合の精度は 0.1 秒程度であろう。電波時計でも表示に 0.1 秒程度の誤差を含むことがある。

これらの効果を考え合わせると、計算値と観測値には 10 秒程度の差があることが予想される。もちろん計算値はかなり高い精度を持っているのだが、計算値と観測値の差が大きかったらといってそれが観測の失敗を意味するわけではない。大切なことは、このような計算や観測は、真の値を追及するために行っているのである、ということを理解することである。

そのためには、計算は慎重に間違いなく精度よく行うことが必要だし、観測もできる限り正確に行うよう配慮することが必要である。そのうえで２つの値に差があったなら、それは自分の結果として大切にすべきである。

（９）コンピュータを利用した簡易な計算

ベッセル日食要素表を用いた上記の計算方法は、日食に関する様々な値を十分な精度で得ることができる。しかし、これはもともと手計算用に開発された数表であり、コンピュータを用いた計算が簡便に利用できる現代には、少し扱いにくい点がある。例えば

- 表に記載された多数の数値を使わないと計算ができない
- 表の値が１０分おきなので、その間の値を知りたいことがある
- １分、１秒間隔の数表をあらかじめ作れば、内挿計算や逆補間法は不用になる

などである。多項式近似という方法でこれらの問題を解決できる。コンピュータを使って日食計算を行う場合には数表よりも多項式のほうが圧倒的に使いやすいだろう[16]。

多項式とは、例えば $f(T)=a_0+a_1T+a_2T^2+a_3T^3$ である。これは４個の項からなる多項式である。a_0 ～ a_3 は定数であり、変数 T の０～３乗を定数にかけて、全部を足した形となっている。a_0 ～ a_3 が決まっているなら、任意の T に対して $f(T)$ を計算できる。

ベッセル日食要素の表には、各時刻 T における様々な変数の値が記載されている。例えば影の座標 x について考える。影の座標 x を多項式 $x(T)=a_0+a_1T+a_2T^2+a_3T^3$ で表すことができたら、表の３０個の数値は、係数 a_0 ～ a_3 のわずか４個の数値で表され、しかも任意の時刻 T について x の値を計算できる。これで上に示した３つの問題点を解決できる。このようにある数値列（または関数）を多項式で近似する方法が多項式近似である。

係数 a_0～ a_3 はエクセルなどの表計算ソフトを使うと容易に決定できる。５－１（日食の始まりの時刻）で述べた多項式近似の方法を使えばよい。

時刻の変数 T は、数表の中央付近の時刻で T=0 となるようにする。ここでは力学時３時で T=0 とし、１時間で T が１だけ変化するとする。つまり、0 時では T=−3、1 時では T=−2、2 時では T=−1、以下同様である。この T に対して x を図示させ、３次関数で多項式近似する[17]。その結果を図２８に示した。

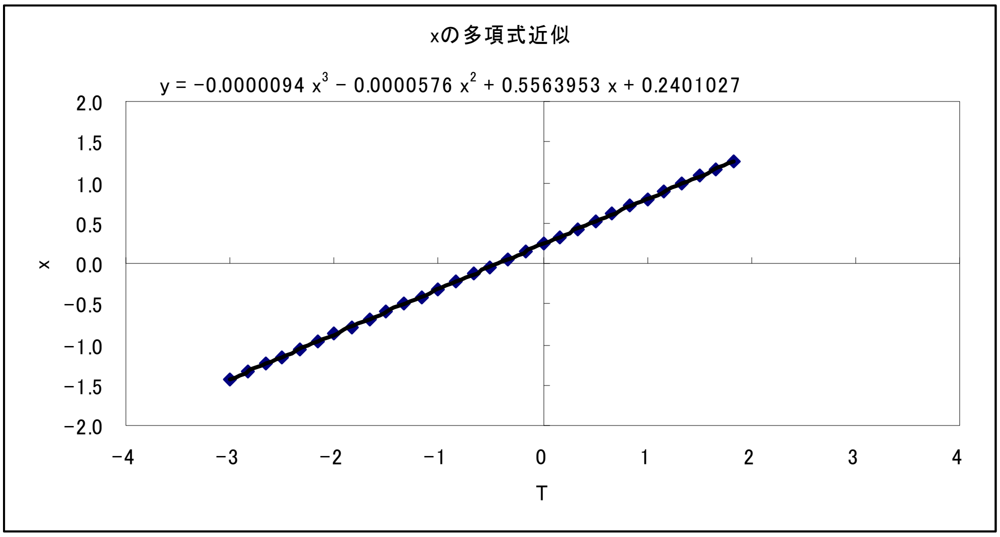


図２８．ｘの多項式近似[18]

16 海上保安庁や国立天文台が多項式としてベッセル日食要素を示してくれればよいのだが・・・。

17 なぜ３次関数かという問題はなかなか難しい。ここでは単に最適だからと了解して欲しい。

18 エクセルの場合、多項式を表示させるには、データ点を右クリックして「近似曲線の書式設定」→「オプション」→「グラフに数式を表示する」を選択する。数式の表示桁数が少ない場合は、数式を右クリックして「データラベルの書式設定」→「表示形式」→「数値」を選択、「小数点以下の桁数」を７桁にする。

こうして、$x(T)=a_0+a_1T+a_2T^2+a_3T^3$における係数を

$$a_0=0.2401027$$
$$a_1=0.5563953$$
$$a_2=-0.0000576$$
$$a_3=-0.0000094$$

として決めることができた。同様の手続きによって、ベッセル日食要素の係数全てを多項式近似し、係数にする。こうして得られた係数を表１５に示した。

表１５．ベッセル日食要素の多項式係数表

	x	y	sin d	cos d	μ[°]	l_1	l_2	tan f_1	tan f_2
a0	0.2401027	−0.0033697	0.3463503	0.9381052	223.3882222	0.5304463	−0.0158597	0.0046013	0.0045784
a1	0.5563953	−0.1774581	−0.0001290	0.0000476	15.0010000	0.0000062	0.0000063	0	0
a2	−0.0000576	−0.0001344	−0.0000001	0.0000001	0	−0.0000128	−0.0000128	0	0
a3	−0.0000094	0.0000032	0	0	0	0	0	0	0

この係数を用いて、任意の時刻 T における要素を計算する。こうして自分用のベッセル日食要素表を作成することができる。例えば１分間隔で、日本標準時が毎分０秒の要素を計算することができる（表１６）。これにもとづいて様々な日食計算を行えば、データが１分間隔なのでいつ日食が始まるかなどの見当をつけやすい[19]。また、あらかじめ日本標準時が区切りよくなっているので、計算と観測の比較に好都合である。

表１６．自分用のベッセル日食要素表の一部

時刻	力学時			秒数	日本標準時			影の座標	
T	h	m	s		h	m	s	x	y
−2.9817	0	1	6	66	9	0	0	−1.419146	0.524472
−2.9650	0	2	6	126	9	1	0	−1.409871	0.521529
−2.9483	0	3	6	186	9	2	0	−1.400596	0.518586
−2.9317	0	4	6	246	9	3	0	−1.391321	0.515643
−2.9150	0	5	6	306	9	4	0	−1.382046	0.512699
−2.8983	0	6	6	366	9	5	0	−1.372771	0.509756
−2.8817	0	7	6	426	9	6	0	−1.363496	0.506813
−2.8650	0	8	6	486	9	7	0	−1.354222	0.503869
−2.8483	0	9	6	546	9	8	0	−1.344947	0.500926
−2.8317	0	10	6	606	9	9	0	−1.335672	0.497982
−2.8150	0	11	6	666	9	10	0	−1.326397	0.495038
−2.7983	0	12	6	726	9	11	0	−1.317122	0.492095
−2.7817	0	13	6	786	9	12	0	−1.307847	0.489151

19　１秒間隔の表を作れば、補間法を使わずに日食に関する時刻が得られる。

参考文献

日食の計算に関係する日本語の書物を示す。

- 天体位置表　海上保安庁
  - 本文でも利用したデータ集。日食の計算方法なども記載がある。
- 天体の位置計算　長沢工著（地人書館）
  - 位置天文学を基礎から学べる好著。天文学の観測・研究を行う者は必読といえる。日食計算に関する記述はない。
- 日の出・日の入りの計算　長沢工著（地人書館）
  - 天文計算の具体的な例として日の出・日の入りをとことん詳しく、丁寧に説明している。日食に関する記述はない。
- 天文計算入門　長谷川一郎著（恒星社）
  - 天文計算の実例が豊富に記載されている。日食計算の記述がある本として、最も入手しやすい。
- 数理天文学　渡邊敏夫（恒星社厚生閣）
  - 位置天文学の教科書で、日食計算の記述も詳しい。ただし手計算を前提としているので記述スタイルがかなり古い。現在は絶版だが図書館などで探せるだろう。

この冊子は以下のＵＲＬから入手できる。

- http://www.astro.sci.yamaguchi-u.ac.jp/~kenta/eclipse/

2011 年 11 月 11 日追記

- 日食計算の基礎　長沢工 著（地人書館）
  - 日本語で読める日食計算の最高の書物が刊行された。